<u>אלגברה מופשטת - תרגיל 3</u>

תאריך הגשה: 24.08.2011
ההגשה היא בתרגול בלבד!
אין דחייה בהגשה!

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

<u>שאלה 1</u>

נתונה התמורה הבאה ב- S_8: $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) רשמו אותה כמכפלת מחזורים זרים, ומצאו את הסדר שלה.

(ii) האם $a \in A_8$?

(iii) מה הסדר של a^{14}?

(iv) רשמו את a^{-1} כמכפלת מחזורים זרים.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ומצא גרעין עבור הנכונות שבהן:

א) קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Z},+) \to \Omega_{2010}$

ב)קיים איזומורפיזם $D_5 \to \Omega_{10}$

ג) קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Q},+) \to S_5$

ד) קיים מונומורפיזם $S_3 \to GL_3(\mathbb{R})$

<u>שאלה 3</u>

א) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_8$ ושל Ω_{25}

ב) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\Omega_{25} \times \mathbb{Z}_8$.

<u>שאלה 4</u>

תארו את החבורה הבאה באמצעות טבלה (ז"א, לוח "כפל" ביחס לפעולה המתאימה), וקבעו למה היא איזומורפית: $Aut\left(GL_n(\mathbb{Z}_7)/SL_n(\mathbb{Z}_7)\right)$ (לכל n>0).

<u>שאלה 5</u>

תהא $G=U_{10}\times U_{10}$.

א) מהו $Inn(G)$?

ב) הוכיחו או הפריכו:

(i) המיפוי $f(x)=x^4$ הוא אוטומורפיזם של G.

(ii) המיפוי $f(x)=x^5$ הוא אוטומורפיזם של G.

ג) האם $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$ איזומורפי ל- $Aut(G)$?

שאלה 6

א) מצאו מונומורפיזם מפורש מהת"ח הבאה של S_4: $\langle(1234)\rangle$ ל- $GL_4(\mathbb{R})$.

(ז"א – כתבו לאיזו מטריצה עובר כל איבר).

ב) האם U_{14} איזומורפי ל- U_{18}?

ג) האם מספר האפימורפיזמים $\mathbb{Z}\to\Omega_4\times\Omega_5$ גדול ממספר האוטומורפיזמים $\mathbb{Z}_{20}\to\mathbb{Z}_{20}$?

ד) נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$\mathbb{Z}_{40}$, $U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$

ה) הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$, $\mathbb{R}/5\mathbb{Z}\cong T$ (כאשר $T:=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\}$).

ו) מצאו תמונות אפימורפיות (ז"א: התמונה של החבורה הנתונה תחת אפימורפיזם לחבורה כלשהי, עד כדי איזומורפיזם) של החבורות U_{10} ושל $\mathbb{Z}_{21}$.

שאלה 7

תהי $Q_8=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:

$ijk=k^2=j^2=i^2=-1$. חבורה זו נקראת **חבורת הקווטרניונים**.

השלימו את לוח הכפל.

א) מצאו את כל תתי החבורות של Q_8

ב) הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא תת חבורה נורמלית. (<u>רמז</u>: בדקו את האינדקס של תתי החבורות).

ג) הוכיחו ש- Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4.

שאלה 8

הוכיחו או הפריכו:

א) לכל חבורה G מסדר 2117 קיימת חבורה סופית X עם $rank(X)=2$ כך ש- G איזומורפית לתת-חבורה כלשהי של X.

ב) אם כל תת-החבורות של חבורה G הן נורמליות, אזי G היא אבלית.

שאלה 9

א) חשבו את aba^{-1} עבור: (1) $a=(1\ 3\ 5)(1\ 2)$ ו- $b=(1\ 5\ 7\ 9)$.

(2) $a=(1\ 3\ 8)$ ו- $b=(1\ 8\ 3\ 9)$.

ב) מצאו אורך של מסלול הצמדה $[\beta]=\{g^{-1}\beta g:\quad g\in S_{15}\}$ של האיבר $\beta=(3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

שאלה 10

עבור $H\le G$ נגדיר את *המנרמל* (או *הנורמליזטור*) של H ב- G:

$N(H):=\{g\in G: gH=Hg\}$.

הוכיחו:

א) $N(H)\le G$ ו- $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$.

ב) $H\lhd N(H)$.

ג) אם $H \lhd K \le G$ אזי $K \le N(H)$.

ד) נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$.

1. הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?
2. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות K, L – כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L \cap K = \{id\}$.

<u>שאלה 11</u>

א) נתונה פעולה $G \times X \to X$ כאשר $G := D_7$ וְ- $|X| = 19$. הוכיחו או הפריכו: לפעולה זו קיימת נקודת שבת.

ב) כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע את הלוחות ב- 3 צבעים קבועים.

ג) מצאו מספר ריבועים שונים עד כדי סיבובים ושיקופים (עד כדי D_4) אשר מתקבלים מריבוע נתון אם מותר לצבוע צלעות ב-2 צבעים קבועים.

<u>שאלת בונוס 1: 10 נקודות</u>

הוכיחו כי קיימת חבורה לא אבלית יחידה מסדר 6 (עד כדי איזומורפיזם) <u>באמצעות ההדרכה הבאה:</u>

א) תהי G חבורה לא אבלית מסדר 6. הוכיחו שיש לה תת-חבורה יחידה מסדר 3 (רמז: היעזרו בתרגיל שפתרנו בתרגול על חבורות לא-אבליות מסדר 8).

ב) הראו שקיים ב- G איבר מסדר 2. כמה איברים כאלו יש?

ג) סמנו את האיבר היוצר את החבורה מסעיף א' ב- σ ואת אחד האיברים מסדר 2 ב- τ. רישמו את כל איברי החבורה באמצעות σ ו- τ.

ד) בנו את לוח הכפל של החבורה G והסיקו שיש חבורה לא אבלית יחידה מסדר 6.

<u>שאלת בונוס 2: 20 נקודות</u>

א) תהי H תת חבורה של G, G סופית, כך ש- $2|H| = |G|$. עבור $a \in H$ ותת קבוצה $X \subseteq G$ נסמן $[a]_X = \{gag^{-1} : g \in X\}$. מהם היחסים האפשריים בין $|[a]_H|$ לבין $|[a]_G|$?

ב) הראו שאברי A_5 נמצאים ב-5 מחלקות צמידות וחשבו את מס' האיברים בכל אחת ממחלקות הצמידות. ודאו שקיבלתם את כל אברי A_5.

ג) ידוע שעבור כל חבורה G כל תת-חבורה נורמלית שלה היא איחוד של מחלקות צמידות. הראו שניתן להשתמש בנתונים על גודל מחלקות הצמידות (ובמשפט לגרנז') כדי להראות ש- A_5 פשוטה (ז"א – שאין ל- A_5 תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית).

בהצלחה!