מבנים אלגברים שיעורי בית 6 פתרון

1 הומומורפיזמים

1. יהי $\phi : G \to H$ הומומורפיזם של חבורות הוכח כי $\phi(x^n) = \phi(x)^n$.
הוכחה: $\phi(x^n) = \phi(x *_G x *_G ...x) = \phi(x) *_H \phi(x) *_H ...\phi(x) = \phi(x)^n$.

2. אם $\phi : G \to H$ איזומורפיזם של חבורות הוכח כי $\forall x \in G|\phi(x)| = |x|$.
הוכחה: נובע ישירות מסעיף 1. אם $\phi(x^n) = \phi(x)^n$ ומהעובדה ש $\phi(1) = 1$ תמיד נובע כי:
אם n היא החזקה המינימלית כך ש- $x^n = 1 \iff \phi(x)^n = 1$. (המינימלי)
טענה זו אינה נכונה עבור הומומורפיזמים ראה דוגמא $\phi : z_{10} \to z_5$.

3. אם $\phi : G \to H$ איזומורפיזם של חבורות הוכח כי G אבלית אמ"ם H אבלית.
הוכחה: יהיו $a, b \in G$ $\phi(ab) = \phi(a) * \phi(b)$ לכן חילוף בחבורה אחת ישרה חילוף בחבורה השניה.
התנאי המספיק הוא על בשביל כיוון אחד. אמ"ם דורש איזומורפיזם.

4. בכל זוג קבע האם החבורות הבאות איזומורפיות: (הוכח את קביעתך)

   א. $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$.
   הוכחה:
   לא. ב-$\mathbb{C}^*$ יש 4 איברים מסדר 4. ואילו ב-$\mathbb{R}^*$ יש 2 1,-1. סתירה לשאלה 2.

   ב. החבורות החיבוריות $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$.
   הוכחה:
   לא. אינן מאותה עוצמה ולכן אין פונקציה חח"ע ועל ביניהן בפרט הומומוריפזם חח"ע ועל.

   ג. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ כחבורות חיבוריות.
   הוכחה:
   לא. ב-$\mathbb{Z}$ אין אף איבר מסדר 2 ואילו ב- $\mathbb{Q}$ עם חיבור ישנו $\frac{1}{2}$.

   ד. יהיו B,A חבורות כלשהן האם $A \times B \cong B \times A$.
   הוכחה:
   כן. נסתכל על $\phi((a, b)) = (b, a)$. על מההגדרה ואילו חח"ע כי $\phi^{-1}((0, 0)) = (0, 0)$.

   ה. S_n, S_m כאשר $n \neq m$.
   הוכחה:
   לא. אינן מאותה עוצמה.

5. הוכח כי ההעתקה של $\phi : G \to G$ המוגדרת על ידי $\phi(g) = g^{-1}$ היא הומומורפיזם אמ"ם G אבלית.
הוכחה:
א. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \iff a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1} \iff ab = ba$.
ב. $abab = a^2b^2 \iff ab = ba$.

2 קבוצת מנה וחבורות אבליות

1. תהי $D_{2n} =< r, s|r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1} >$. תהייה ההצגה הרגילה של החבורה הדיאדרלית מסדר 2n ויהי k מספר חיובי המחלק את n. הוכי כי $< r^k >$ היא תת־חבורה נורמלית של $D_{2n}/ < r^k > \cong D_{2k}$.
הוכחה:
נסתכל על $\phi(sr^i) = sr^{i \bmod k}$ (אם אין s במקור אז ללא s גם בתמונה) הפונקציה על D_{2k} מן ההגדרה. $ker(\phi) = r^i | i \bmod k = 0 =< r^k >$. לכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $D_{2n}/ < r^k > \cong D_{2k}$

2. נתבונן בחבורת המנה החיבורית $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכח כי כל קוסט בחבורת המנה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ מכיל נציג יחיד $q \in Q$ $0 \le q < 1$.
הוכחה:
מן ההגדרה של קבוצת המנה שני מספרים הם שקולים אמ"ם ההפרש ביניהם שלם. כל מספר רציונלי הוא מן הצורה שלם ועוד שבר בין 0 ל־1, אכן $q = \lfloor q \rfloor + (\lfloor q \rfloor - \lfloor q \rfloor)$ כאשר $q - \lfloor q \rfloor \in [0, 1]$.

ב. הראה כי כל איבר של $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הוא מסדר סופי אבל יש איבר מכל סדר שהוא.
הוכחה:
יהי איבר $\bar{a} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ניתן להציג את $\bar{a}$ כ $c \in Z$ | $\frac{b}{c}$ לכן $a + a + ... + a$ c פעמים יתן מספר שלם כאשר מספר שלם בקבוצת המנה שקול ל־0 שהוא איבר היחידה. נראה כי קיים איבר מכל סדר ואכן $\frac{1}{n}$ הוא איבר מסדר n.

ג. הראה כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ היא תת חבורת הפיתול של $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
הוכחה:
נראה כי כל איבר ב־$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ מסדר סופי הוא מ־$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (הראנו כי כל איבר ב־$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הוא מסדר סופי).
$\forall a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ מסדר סופי קיימים $b, c \in \mathbb{Z}$ כך ש־$a = b$ $\iff$ $a \in \mathbb{Q}$

ד. הוכח כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ עם חיבור איזומורפית לחבורה הכפלית של שורשי היחידה ב־$\mathbb{C}^*$.
הוכחה:
נסתכל על $\mathbb{C}^*$ בשתי דרכים שונות, הצגה רגילה והצגה פולרית. בהצגה הרגילה קבוצת הפיתול היא שורשי היחידה. בהצגה הפולרית קבוצת הפיתול היא אוסף הזוגות $(1, \alpha)$ כאשר $\alpha \bmod 360$ $\alpha \in \mathbb{Q}$. נזכיר כי הפעולה בהצגה פולרית היא: $(*, +)$. נשאר להראות כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}/360\mathbb{Z}$ ואכן $360\mathbb{Z} \cong Z$.

3. הוכח כי אם $G/Z(G)$ ציקלית אזיי G אבלית.
הוכחה: אם $G/Z(G) =< \bar{x} >$ ציקלית אזיי כל איבר $g \in G$ ניתן להצגה על ידי $g = x^i * z$

כאשר $z \in G/Z(G)$. (נובע מן ההגדרה ישירות) לכן $g_1 * g_2 = x^i z_1 * x^j z_2 = x^{i+j} z_2 z_1$
אך גם $x^{i+j} z_2 z_1 = x^j z_2 x^i z_1 = g_2 * g_1$.