מתמטיקה בדידה – תרגיל 5

שאלה 1

א. תהי הקבוצה $B_k=\{n^k \mid n\in\mathbb{N}\}$, כאשר $k\in\mathbb{N}$. הוכח ש- $|B_k|=|\mathbb{N}|$, $\forall k\in\mathbb{N}$ (בשאלה זו קבוצה $\mathbb{N}$ אינה מכילה את 0).

ב. הוכח שאם $|A\setminus B|=|B\setminus A|$ אז $|A|=|B|$.

שאלה 2

א. הוכח או הפרך: אם $|B|=|A|$ אז קיימת פונקציה f חח"ע מ- A ל- B שהיא לא על

ב. תהי K קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים. הוכח ש- K אינה בת מניה.

ג. מצא מהי עוצמת הקבוצה: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid (x-\pi)\in\mathbb{Q}\}$ (למשל, $\pi,\pi+0.189\in A$).

שאלה 3

א. תהי A קבוצת עיגולים זרים במישור. הוכח כי $|A|\le\aleph_0$ (עיגול במישור מוגדר באופן הבא: $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$, כאשר $a,b,r\in\mathbb{R}$ ו- $r>0$).

ב. תהי B קבוצת מעגלים זרים במישור. האם בהכרח $|B|\le\aleph_0$? (מעגל במישור מוגדר באופן הבא: $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$, כאשר $a,b,r\in\mathbb{R}$ ו- $r>0$).

שאלה 4

א. הוכיחו ש- $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{0,1\}$.

ב. הוכיחו ש- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$.

שאלה 5

יהיו α,β,γ עוצמות. הוכיחו ישירות כי $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. *[הדרכה: הניחו כי A,B,C קבוצות זרות מעוצמות α,β,γ בהתאמה והראו ישירות כי $|A\times(B\cup C)|=|(A\times B)\cup(A\times C)|$.]*

שאלה 6

הוכיחו:

א. $|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{Z}}|=|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$.

ב. $|\{0,1,2\}^{[0,1]\times\mathbb{N}}|=|P(P(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}))|$.

הדרכה: השתמשו בחשבון עוצמות.

שאלה 7

תהי A קבוצה אינסופית.

1. הראו שקיימת פונקציה חח"ע מ-A^A אל $P(A \times A)$. [רמז: גרף של פונקציה הינו יחס.]
2. הראו כי לכל עוצמה אינסופית α מתקיים $\alpha^\alpha = 2^\alpha$.
3. הראו כי לכל שני עוצמות אינסופיות $\alpha \leq \beta$ מתקיים $\beta^\alpha = 2^\alpha$.

שאלה 8

פשטו את הביטויים הבאים. ניתן להיעזר בשאלה 7. התשובות צריכות להיות ביטויים כגון $\aleph_0, א, \Phi \coloneqq 2^{א}, 2^{\Phi}, \ldots$.

1. $(\aleph_0 + א)^{\aleph_0}$
2. $א\left(5^{א} + \aleph_0^{\aleph_0}\right)$
3. $(3^{א})^{3^{\aleph_0}} + א^{א}$
4. $א \cdot \aleph_0^{(\aleph_0^{א} + א)}$

שאלה 9

חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות. התשובות צריכות להיות ביטויים כגון $\aleph_0, א, \Phi \coloneqq 2^{א}, 2^{\Phi}, \ldots$. נמקו את תשובתכם.

1. $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f(n)\}$ (קבוצת הפונקציות העולות ממש מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$).
2. $\{(A, B) \mid A \subseteq 2\mathbb{Z}, B \subseteq 2\mathbb{Z} + 1\}$ (קבוצת כל הזוגות (A, B) כך ש-A קבוצה של מספרים שלמים זוגיים ו-B קבוצה של מספרים שלמים אי זוגיים).
3. $\left\{f \in \mathbb{R}^{[1,2]\times[0,2]} \mid f(1,1) = \pi\right\}$ (קבוצת כל הפונקציות f מהמלבן $[0,2] \times [1,2]$ ל-$\mathbb{R}$ המקיימות $f(1,1) = \pi$).
4. $\{X \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq X\}$ (תתי הקבוצות של $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ שמכילות את $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).