

### תרגיל 13 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כאשר

$$f(z) = e^{2z}(z-1)^3(z-2)^4(z-3)^{-5}(z-5)^{-3}$$

2. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש למשוואה

$$z^3 - 2z^2 + \frac{1}{4} = 0$$

(א) בטבעת  $\frac{1}{4} < |z| < 1$  ?

(ב) בתחום  $|z| > 1$  ?

3. תהי פונקציה אנליטית ב  $\{z \mid |z| \leq 1\}$  המקיימת כי  $|g(z)| < 1$  על המעגל  $|z| = 1$ . הוכיחו כי קיימת  $z$  אחת ויחידה בכדור היחידה שבה  $g(z) = z$ .

4. יהי  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  פולינום. הוכיחו כי חייבת להיות נקודה  $z$  עם  $|z| = 1$  שבה  $|p(z)| \geq 1$ .