מתמטיקה בדידה – תרגיל 3 - פתרון

שאלה 1

בשני הסעיפים הבאים בדוק האם היחס R על הקבוצה A הוא יחס שקילות. אם כן, מצא את מחלקות השקילות:

א. $xRy \Leftrightarrow 3|(x+2y)$ על הקבוצה $A=\mathbb{N}$.

ב. תהי B קבוצה בעלת n איברים ונניח כי $n \geq 2$. נגדיר $A=P(B)$ ו- $xRy \Leftrightarrow (x \subseteq y) \vee (y \subseteq x)$.

פיתרון

א. רפלקסיביות- יהי $x \in \mathbb{N}$, $3|(x+2x)$ ולכן $(x,x) \in R$.

סימטריות- נניח ש- $(x,y) \in R$ ז"א $3|(x+2y)$

$y+2x=(x+2y)+(x+2y)-3y$ ולכן $3|(y+2x)$, ז"א $(y,x) \in R$.

טרנזטיביות- יהי $(x,y) \in R, (y,z) \in R$ ז"א $3|(x+2y), 3|(y+2z)$.

$x+2z=(x+2y)+(y+2z)-3y$ ולכן $3|(x+2z)$.

סה"כ קיבלנו ש-R הוא יחס שקילות.

מחלקות השקילות הן:

$$[1]_R=\{1+3n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$
$$[2]_R=\{2+3n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$
$$[3]_R=\{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ב. היחס R אינו יחס שקילות, כי אין טרנזטיביות. נוכיח זאת: יהי B קבוצה כך ש- $|B| \geq 2$ ויהיו $x,y \in B$ כך ש $x \neq y$ קיימים כאלה ע"פ הנתון. לפי הגדרת קבוצת חזקה $\{x\},\{y\},\{x,y\} \in A$, לפי הגדרת היחס R נקבל $(\{x\},\{x,y\}) \in R, (\{x,y\},\{y\}) \in R$ מכיוון ש $x \neq y$ נקבל $(\{x\},\{y\}) \notin R$ ולכן היחס R אינו טרנזטיבי.

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4,5,6\}$. הסבירו מדוע אין יחסי סדר מלאים נוספים.

פיתרון

יחסי הסדר על $\{4,5,6\}$ הם:

- $\{(4,5),(5,6),(4,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(4 \leq 5 \leq 6)$

- $(4 \leq 6 \leq 5)$ $\{(4,6),(6,5),(4,5),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
- $(5 \leq 4 \leq 6)$ $\{(5,4),(4,6),(5,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
- $(5 \leq 6 \leq 4)$ $\{(5,6),(6,4),(5,4),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
- $(6 \leq 4 \leq 5)$ $\{(6,4),(4,5),(6,5),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
- $(6 \leq 5 \leq 4)$ $\{(6,5),(5,4),(6,4),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

יש רק שישה יחסי סדר כי יש 3 אפשרויות לבחור את האיבר הקטן ביותר בסדר. לאחר שעשינו זאת, יש 2 אפשרויות לבחור את האיבר הבא בגודלו (לא ניתן לבחור את האיבר הקטן ביותר). האיבר שנשאר חייב להיות האיבר הגדול ביותר. לכן, יש לכל היותר $3 \cdot 2 = 6$ סדרים שונים על $\{4,5,6\}$.

שאלה 3

תהי X קבוצה ו-R יחס סדר על X. נניח כי $X \subseteq Y$ ונגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$. הראו כי S יחס סדר על Y.

פיתרון

<u>S טרנזיטיבי:</u> יהיו $a,b,c \in Y$ כך ש-aSb ו-bSc, כלומר $(a,b),(b,c) \in S$. היות ו-$S = R \cap Y \times Y$ מתקיים $(a,b),(b,c) \in R$. R טרנזיטיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן $(a,c) \in R$. אבל $(a,c) \in Y \times Y$ ולכן $(a,c) \in R \cap Y \times Y = S$, כלומר aSc.

<u>S רפלקסיבי:</u> יהי $a \in Y$, אזי $(a,a) \in Y$. היות ו-R רפלקסיבי (כי הוא יחס סדר) מתקיים, $(a,a) \in R$. לכן, $(a,a) \in R \cap Y \times Y = S$, כלומר aSa.

<u>S אנטי סימטרי:</u> יהיו $a,b \in Y$ כך ש-aSb ו-bSa. היות ו-$S \subseteq R$ נובע ש-aRb ו-bRa. אבל R אנטיסימטרי (כי הוא יחס סדר) ולכן $a = b$.

<u>קיבלנו</u> ש-S טרנזיטיבי, רפלקסיבי ואנטיסימטרי. לכן S יחס סדר. **משל.**

שאלה 4

תהי X קבוצה ויהיו R,S שני יחסי סדר מלאים על X. הוכיחו כי אם $R \subseteq S$ אז $R = S$.

פיתרון

נשאר להוכיח ש: $S \subseteq R$. נניח בשלילה ש: $S \not\subset R$, כלומר שקיים $(a,b) \in S$ כך ש: $(a,b) \notin R$.

R יחס סדר מלא ולכן כיוון ש $(a,b) \notin R$ מתקיים ש $(b,a) \in R$ או $a = b$.

אם $a = b$ אז כיוון ש-R רפלקסיבי מתקיים ש $(a,b) \in R$

(כי אז מתקבל (a,a) והרי הוא שייך ל-R) בסתירה להנחה.

אם $a \neq b$ אז $(b,a) \in R$, כיוון ש $R \subseteq S$ נקבל ש $(b,a) \in S$. קיבלנו ש $(b,a) \in S$ וגם $(a,b) \in S$, לכן $a = b$ כי S הוא יחס סדר מלא, בסתירה להנחה.

מכאן ש $R \subseteq S$ ולכן $S = R$.

שאלה 5

תהי $(X,\preceq)$ קבוצה סדורה חלקית כך ש-$\inf A$ קיים לכל $\phi \neq A \subseteq X$. הראו כי לכל $A \subseteq X$ לא ריקה וחסומה מלעיל קיים סופרימום.

הוכחה

תהי $A \subseteq X$ לא ריקה וחסומה מלעיל. נגדיר את B להיות קבוצת החסמים מלעיל של A. היות ו-A חסומה מלעיל, B לא ריקה ולכן $\inf B$ קיים (לפי הנתונים).

אנו טוענים כי $\inf B$ חסם מלעיל של A (כלומר, $\inf B \in B$). באמת, לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ מתקיים $a \preceq b$ (כי b חסם מלעיל של A) ולכן כל $a \in A$ הוא חסם מלרע של B. לפי הגדרת האינפימום, $\inf B$ הוא החסם מלרע הגדול ביותר של B ולכן $a \preceq \inf B$ לכל $a \in A$ (כי a חסם תחתון של B). זה אומר של $\inf B$ חסם מלעיל של A.

כעת, $\inf B$ הוא חסם מלעיל של A ולכל $b \in B$ מתקיים $\inf B \preceq b$ (כי $\inf B$ חסם מלרע של B). היות ו-B היא קבוצת החסמים מלעיל של A נובע ש-$\inf B$ הוא חסם מלעיל קטן ביותר של A ולכן קיים $\sup A$ ושווה ל-$\inf B$.

מש"ל.

שאלה 6

תהי A קבוצה ו-$\preceq$ יחס סדר על A. נגדיר יחס R על $A \times A$ ע"י

$(a,b)R(c,d)$ אם"ם $\{a \preceq c$ וגם $a \neq c\}$ או $\{a = c$ וגם $b \preceq d\}$.

(R נקרא <u>הסדר המילוני</u> על $A \times A$).

א. הראו כי R יחס סדר על $A \times A$.

ב. ציירו <u>דיאגרמת הסה</u> ומצאו איברים <u>מקסימליים</u>, <u>מינימליים</u>, <u>גדולים ביותר</u> ו<u>קטנים ביותר</u> של R כאשר $A = \{0,1,2\}$ ו-$\preceq = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(0,2)\}$ (אין צורך להוכיח כי $\preceq$ יחס סדר).

ג. בהנחות של סעיף ב'. מצאו את $\inf\{(1,1),(1,0),(2,0)\}$ (ייתכן שהוא אינו קיים). נמקו את קביעתכם.

פתרון

א. הוכחה:

נראה ש-R טרנזיטיבי: נניח ש-$(a,b)R(c,d)$ ו-$(c,d)R(e,f)$. כלומר:

$\{\{a \le c$ וגם $a \ne c\}$ או $\{a = c$ וגם $b \le d\}\}$ וגם

$\{\{c \le e$ וגם $c \ne e\}$ או $\{c = e$ וגם $d \le f\}\}$.

היות ו-$a = c$ גורר $a \le c$ ו-$c = e$ גורר $c \le e$ נובע שבכל מקרה מתקיים $a \le c \le e$. מהטרנזיטיביות של $\le$ נובע ש-$a \le e$.

שימו לב כי הטענה באדום גוררת את הטענה הבאה:

$\{\{a \le c$ וגם $a \ne c\}$ או $\{c \le e$ וגם $c \ne e\}\}$ או

$\{\{a = c$ וגם $b \le d\}$ וגם $\{c = e$ וגם $d \le f\}\}$

על סמך זאת, נחלק למקרים:

$\{a \le c$ וגם $a \ne c\}$ או $\{c \le e$ וגם $c \ne e\}$: נניח בשלילה ש-$a = e$, אזי מתקיים $a \le c \le e = a$ ולפי האנטיסימטריות של $\le$ נובע $a = c$. קיבלנו $a = c = e$ וזו סתירה להנחה שלנו שאומרת ש-$a \ne c$ או $c \ne e$. לכן, $a \ne e$. אבל זה אומר ש-$(a,b)R(e,f)$ ולכן גמרנו.

$\{a = c$ וגם $b \le d\}$ וגם $\{c = e$ וגם $d \le f\}$: אז $a = c = e$ ו-$b \le d \le f$. מהטרנזיטיביות של $\le$ נובע $b \le f$. לכן, לפי הגדרת R נובע $(a,b)R(e,f)$.

בכל מקרה קיבלנו $(a,b)R(e,f)$ ולכן R טרנזיטיבי.

נראה ש-R רפלקסיבי: יהי $(a,b) \in A \times A$. אזי $a = a$ ו-$b \le b$ (כי $\le$ רפלקסיבי) ולכן $(a,b)R(a,b)$, כדרוש.

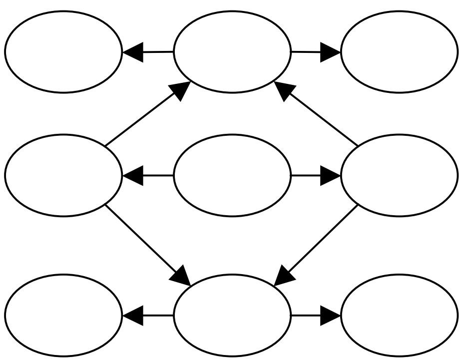
נראה ש-R אנטיסימטרי: יהי $(a,b),(c,d) \in A \times A$ כך ש-$(a,b)R(c,d)$ ו-$(c,d)R(a,b)$. בהוכחה הטרנזיטיביות של R הראינו שזה אומר ש-$a \le c \le a$ (הציבו $e = a$ בהוכחה). לכן, מהאנטיסימטריות של R נובע ש-$a = c$. לכן:

$(a,b)R(c,d)$ גורר ש-$b \le d$ ו-

$(c,d)R(a,b)$ גורר ש-$b \le d$

ושוב, לפי האנטי סימטריות של $\le$ נובע $b = d$.
לכן, $(a,b) = (c,d)$.

משל.



ב. נבנה דיאגרמת הסה:

הדרך לבנייה: נניח $(a,b)R(c,d)$. אם $a \neq c$ אז יש חץ מ-(a,b) ל-(c,d) אם"ם אין איברים בין a ל-c (ביחס ל-$\leq$) וגם אין איבר גדול מ-b וגם אין איבר קטן מ-d (בדקו!). אם $a = c$ אז יש חץ מ-(a,b) ל-(c,d) אם"ם אין איבר בין b ל-d (בדקו!).

שאלה 7

בסעיפים הבאים נתונות שתי קבוצות A,B ופונקציה $f: A \to B$. קבעו האם f היא פונקציה ואם כן, האם היא חח"ע ו\או על.

א. $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{N} \cup \{0\}$, f מוגדרת ע"י $f(x) = |x|$

ב. $A = \mathbb{Q},\ B = \mathbb{N} \cup \{0\}$, f מוגדרת ע"י $f(x) = |x|$

ג. תהי X קבוצה כלשהי. $A = B = P(X)$ ו-f מוגדרת ע"י $f(V) = X \setminus V$. [עליכם לפתור עבור X כללית.]

ד. תהיינה X,Y קבוצות ותהי $g: X \to Y$ חח"ע (אך לא על). $A = P(X), B = P(Y)$ ו-f מוגדרת ע"י $f(V) = \{g(a) \mid a \in V\}$. [עליכם לפתור עבור X,Y כלליות.]

<u>**פתרון**</u>:

א. f היא פונקציה על ולא חח"ע.

<u>לא חח"ע</u>: $f(1) = f(-1) = 1$; <u>על</u>: $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

ב. f אינה פונקציה כיוון שלא לכל איבר $q \in \mathbb{Q}$ קיימת תמונה ב- $\mathbb{N} \cup \{0\}$, כגון: $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ג. f חח"ע- יהיו $B_1, B_2 \in P(X)$ ונניח ש $f(B_1) = f(B_2)$ ז"א $X \setminus B_1 = X \setminus B_2$

נוכיח ש- $B_1 = B_2$

נוכיח תחילה ש- $B_1 \subseteq B_2$: יהי $x \in B_1$. מכיוון ש $B_1 \in P(X)$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $B_1 \subseteq X$

ולכן $x \in X$. מכיוון ש

$X \setminus B_1 = X \setminus B_2$ נקבל ש $x \notin X \setminus B_2$ ז"א $x \notin X \vee x \in B_2$ אבל $x \in X$ ולכן בהכרח $x \in B_2$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $B_2 \subseteq B_1$.

f על- יהי $B_1 \in P(X)$ נתבונן ב -

$$f(X \setminus B_1) = X \setminus (X \setminus B_1) = X \cap \left(X \cap B_1^c\right)^c = X \cap \left(X^c \cup B_1\right) = \left(X \cap X^c\right) \cup \left(X \cap B_1\right) = B_1$$

השוויון הראשון-נובע מהגדרת f . השוויון השני-נובע מהתרגול. השוויון השלישי- דה מורגן

השוויון הרביעי-דסטריביוטיביות

השוויון החמישי-נתון ש $B_1 \in P(X)$ על פי הגדרת קבוצת החזקה $B_1 \subseteq X$ וידוע שאם $B_1 \subseteq X$ אז $X \cap B_1 = B_1$.

ד. f חח"ע- יהיו $A_1, A_2 \in P(X)$ כך ש $f\left(A_1\right) = f\left(A_2\right)$ ז"א

$\left\{g(a) \middle| a \in A_1\right\} = \left\{g\left(a\right) \middle| a \in A_2\right\}$.

נוכיח ש $A_1 = A_2$ תחילה נוכיח ש $A_1 \subseteq A_2$.

יהי $x \in A_1$ ולכן $g(x) \in \left\{g\left(a\right) \middle| a \in A_1\right\} = \left\{g\left(a\right) \middle| a \in A_2\right\}$ מכיוון ש g חח"ע $x \in A_2$, כי אחרת (ז"א אם $x \notin A_2$) נקבל ש $g(x) \in \left\{g\left(a\right) \middle| a \in A_2\right\}$, ז"א קיים $y \in A_2$ כך ש $g(x) = g(y)$ מכיוון שמצד אחד $x \notin A_2$ ומצד שני $y \in A_2$ נקבל ש $x \neq y$ בסתירה לנתון ש g חח"ע.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $A_2 \subseteq A_1$.

f לא בהכרח על- כי g לא על אז קיים $y \in Y$ כך שעבורו לא קיים x כך ש $g(x) = y$ ובפרט לא קיים $A_1 \in P(X)$ כך ש $y \in \left\{g(a) \middle| a \in A_1\right\}$ ובפרט $\left\{y\right\} \neq \left\{g(a) \middle| a \in A_1\right\}$ ומהגדרת החזקה $\left\{y\right\} \in P(Y)$.

שאלה 8

יהיו A, B קבוצות לא ריקות.

א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $g : A \to A \times B$.

ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $h : A \times B \to B \times B$.

<u>**פתרון**</u>:

א. נתון ש A, B קבוצות לא ריקות. יהי $b \in B$. נגדיר פונקציה $g : A \to A \times B$ ע"י לכל $a \in A$ $g(a) = (a,b)$. נוכיח ש g חח"ע: יהיו $a_1, a_2 \in A$ ונניח ש $g(a_1) = g\left(a_2\right)$ ז"א $(a_1, b) = (a_2, b)$ על פי הגדרת זוג סדור - $a_1 = a_2$.

ב. נתון ש A, B קבוצות לא ריקות. יהי $(a,b) \in A \times B$. נגדיר פונקציה $h : A \times B \to B \times B$ ע"י לכל $(a,b) \in A \times B$, $h((a,b)) = (f(a), b)$. נוכיח ש h חח"ע: יהיו $a_1, a_2 \in A, \quad b_1, b_2 \in B$ ונניח ש $h((a_1, b_1)) = h((a_2, b_2))$ ז"א $(f(a_1), b_1) = (f(a_2), b_2)$ על פי הגדרת זוג סדור - $f(a_1) = f(a_2), \quad b_1 = b_2$. מחח"ע של f נובע $a_1 = a_2$. לכן קיבלנו ש- h חח"ע.