תרגיל 6 בוגרים/תרגיל 7 תיכוניסטים.

1 כלל שרשרת ונגזרת כיוונית.

תרגיל 1. (ממבחן). תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. הראו, שאם $g_y(x)=f(x,y)$ רציפה ב x לכל y, ונניח, שקיים $M>0$ כך שלכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\left|f'_y(x,y)\right|<M$. הראו, ש f רציפה ב $\mathbb{R}^2$.

תרגיל 2. נגדיר $g(x,y)=\left(x,x^2-y\right)$. נשים לב, שהפונקציה הפיכה ולכן ניתן לתאר כל נקודה ב $\mathbb{R}^2$בעזרת קואודינטות

$$u=x$$
$$v=x^2-y$$

נשים לב, שלמשה $u=x$ וכל נקודה (x,y) ניתן לבטא באופן יחיד על ידי הקואורדינטות

$$(x(x,v),y(x,v))=(x(u,v),y(u,v))$$

.

נכון או לא נכון? הסבירו.

1. $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial x}=1$.
2. $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial x}=0$.

תרגיל 3. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, ונניח ש

$$\frac{\partial f}{\partial u}(10,4)=5$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(10,4)=2$$

נגדיר:

$$u(x,y)=x^2+y^3$$
$$v(x,y)=x+y.$$

נגדיר $z(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$. חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(3,1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(3,1)$.

תרגיל 4. תהי

$$f(x,y,z)=\left(\sin\left(x^2\right)+\sin\left(y^2\right)+z^2,e^z\left(x^3+y^3\right)\right)$$

ונניח שקיימת $g(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך $g(3,2)=\left(\pi^2,\pi^2,0\right)$, g דיפרנציאבילית ב $(3,2)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(3,2)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \frac{\partial g}{\partial v}(3,2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

נגדיר, $h=f\circ g$. מצאו את $\frac{\partial h_2}{\partial u}(3,2)$ ואת $\nabla h_1(3,2)$.

תרגיל 5. תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$. נאמר ש $f:E\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $0<M$ כך שלכל $x,y\in E$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיימות בכל נקודה ו$E\subseteq\mathbb{R}^n$. אזי אם הנגזרות החלקיות של f חסומות ב E, אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ.
2. תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f:E\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות (ז"א הנגזרות החלקיות רציפות), אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ ב E.
3. (ממחבן). אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ בכדור היחידה הסגור $\overline{B(0,1)}$.

תרגיל 6. הוכיחו/הרפיכו: אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, ולכל $v\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a)\geq 0$ אזי $\mathrm{d}f_a=0$ (כלמר, דיפרנציאל הוא העתקת האפס).

תרגיל 7. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב a, ו $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ דיפרציאבילית ב $f(a)$. הראו שלכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial v}(a)=\mathrm{d}g_{f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right).$$

תרגיל 8. (ממבחן). תהי $f(x,y)=xe^y-ye^x$. לכל אחת מהנקודות הבאות, מצאו כיוון אחד בו הנגזרת חיובית, כיוון אחד בו הנגזרת שלילית וכיוון אחד שבו הנגזרת מתאפסת, או הוכיחו שלא קיים כזה.

1. ראשית הצירים $(0,0)$.
2. הנקודה $(1,0)$.
3. הנקודה $(0,-1)$.