

חשבון אינפי 2 למדמ"ח

שיעור 5 : נגזרת של פונקציה המוגדרת באמצעות אינטגרל, יישומים של אינטגרל מסוים לחישוב של שטח, נפח גוף סיבוב ואורך קשת.

משפט 1: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ ותהי $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ אזי $F(x)$ גזירה לכל

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \text{ ומתקיים } x \in [a, b]$$

משפט 2: תהיינה $h(x)$ רציפה ו- $f(x)$ ו- $g(x)$ גזירות, אזי

$$\frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

1. גזרו את הפונקציה $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$ $x > 0$

פתרון: לפי משפט 2 נקבל

$$F'(x) = \cos(\sqrt{x})^2 (\sqrt{x})' - \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}$$

2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ בתחום $x > 0$

פתרון:

$$x = \pi n, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow F'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$$

נבדוק את סוג הקיצון לפי הנגזרת השנייה

$$F''(\pi n) = (-1)^n \frac{1}{\pi n} \Leftrightarrow F''(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

אם $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$ נקבל $F''(x) < 0$ ולכן $x = \pi(2k - 1)$ נקודות מקסימום

אם $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ נקבל $F''(x) > 0$ ולכן $x = 2k\pi$ נקודות מינימום

3. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x \ln(\sin t) dt}{\cos^2 x} \quad \text{א.}$$

פתרון: זהו גבול מהצורה " $\frac{0}{0}$ ", הפונקציות במונה ובמכנה גזירות (הפונקציה של

המונה גזירה לפי משפט 1 לעיל) וקיימת סביבה מנוקבת של $\frac{\pi}{2}$ בה הנגזרת של

המכנה $(\cos^2 x)' = -2 \cos x \sin x$ אינה מתאפסת ולכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x \ln(\sin t) dt}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{-2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{-\sin 2x}$$

מתקיימים ולכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל פעם נוספת:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x \ln(\sin t) dt}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{-2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{-\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x \cdot 2 \cos 2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} \quad \text{ב.}$$

פתרון: זהו גבול מהצורה " $\frac{0}{0}$ " והתנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x} = \frac{2}{3}$$

נחזור לאינטגרלים מסוימים

1. חשבו את האינטגרלים המסוימים:

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x \sin(\ln x + 1)}{x} dx \quad \text{א.}$$

פתרון: נציב: $t = \ln x + 1$. במקרה זה $dt = \frac{1}{x} dx$ וגבולות האינטגרציה החדשים הם

$$t = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2, \text{ גבול תחתון, } -t = \ln \frac{1}{e} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x \sin(\ln x + 1)}{x} dx = \int_0^2 (t-1) \sin t dt \text{ נקבל האינטגרציה}$$

אינטגרציה בחלקים: $f' = 1, g = -\cos t$ במקרה זה $f = t - 1, g' = \sin t$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x \sin(\ln x + 1)}{x} dx &= \int_0^2 (t-1) \sin t dt = -(t-1) \cos t \Big|_0^2 - \int_0^2 -\cos t dt \\ &= -(2-1) \cos 2 + (0-1) \cos 0 + \sin t \Big|_0^2 = -\cos 2 - 1 + \sin 2 \end{aligned}$$

$$\int_e^{e^3} |x^2 - 5x + 6| dx \quad \text{ב.}$$

פתרון: נשים לב ש- $|x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & x \leq 2 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 5x - 6 & 2 < x < 3 \end{cases}$ ו- $2 < e < 3 < e^3$ ולכן

$$\int_e^{e^3} |x^2 - 5x + 6| dx = \int_e^3 (-x^2 + 5x - 6) dx + \int_3^{e^3} (x^2 - 5x + 6) dx = \dots = -9 + \frac{19}{3} e^3 - \frac{5}{2} e^2 + 6e + \frac{1}{3} e^9 - \frac{5}{2} e^6$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx \quad \text{ג.}$$

פתרון: נשים לב שתחום ההגדרה של $f(x) = \cos x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ הינו קטע $-1 < x < 1$,

בתחום זה הפונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx = 0 \text{ כלומר הפונקציה אי זוגית ולכן } f(-x) = -f(x)$$

נוסחאות לחישוב שטח

א. יהיו f ו- g פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$. אם $f(x) \geq g(x)$ לכל x בקטע,

אזי שטח התחום המוגבל ע"י העקומה $y = f(x)$ מלמעלה, העקומה $y = g(x)$

מלמטה, הישר $x = a$ משמאל והישר $x = b$ מימין, הוא $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

ב. יהיו u ו- v פונקציות רציפות בקטע $[c, d]$. אם $u(y) \geq v(y)$ לכל y בקטע, אזי שטח התחום המוגבל ע"י העקומה $x=v(y)$ משמאל, העקומה $x=u(y)$ מימין,

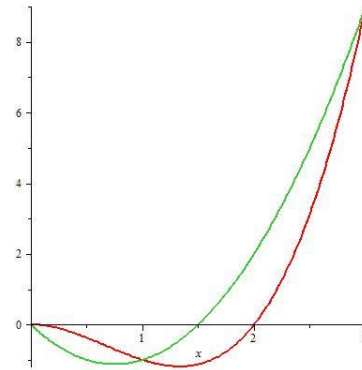
$$S = \int_c^d (u(y) - v(y)) dy$$

הישר $y=c$ מלמטה והישר $y=d$ מלמעלה, הוא

2. חשבו את שטח התחום הכלוא בין העקומות הנתונות:

א. $f(x) = x^3 - 2x^2$, $g(x) = 2x^2 - 3x$, $x=0$, $x=3$

פתרון:



הגרף האדום זהו גרף של $f(x)$ והירוק של $g(x)$

נמצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ ו- $g(x)$:

$$x^3 - 2x^2 = 2x^2 - 3x$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x-1)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$$

לכל $0 < x < 1$ מתקיים $f(x) > g(x)$

ולכל $1 < x < 3$ מתקיים $g(x) > f(x)$

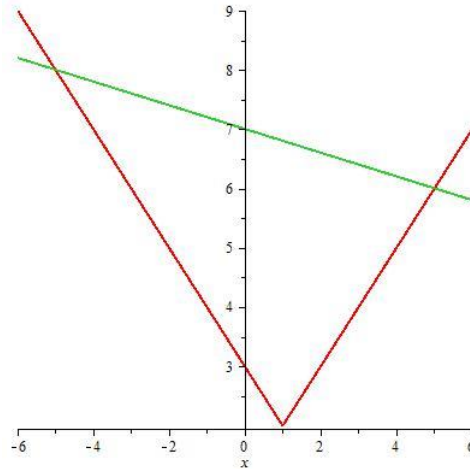
$$S = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^3 (g(x) - f(x)) dx$$

$$= \int_0^1 x^3 - 2x^2 - (2x^2 - 3x) dx + \int_1^3 2x^2 - 3x - (x^3 - 2x^2) dx = \dots = \frac{37}{12}$$

ולכן

ב. $f(x) = 2 + |x-1|$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + 7$

פתרון:



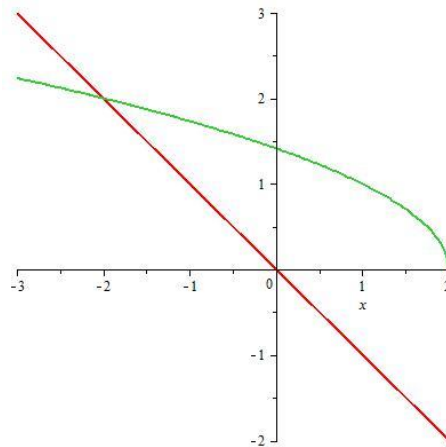
$$(הגרף האדום) f(x) = 2 + |x - 1| = \begin{cases} -x + 3 & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

נקודות החיתוך של שני הגרפים : $x = -5, x = 5$.

$$S = \int_{-5}^1 -\frac{1}{5}x + 7 - (-x + 3) dx + \int_1^5 -\frac{1}{5}x + 7 - (x + 1) dx = \dots 24$$

ג. $f(x) = -x, g(x) = \sqrt{2-x}, y = 0$

פתרון:



במקרה זה אם עושים אינטגרציה לפי x צריך לחלק את התחום לשני תחומים - החלק השמאלי החסום ע"י פרבולה מלמעלה וע"י ישר מלמטה והימני החסום בין הפרבולה לציר ה- x .

נוח יותר לעשות אינטגרציה לפי y ואז אין צורך לחלק לשני תחומים:

$$(רשמנו את הישר כפונקציה של y) $y = -x \Rightarrow x = -y$$$

$$(פרבולה כפונקציה של y) $y = \sqrt{2-x} \Rightarrow y^2 = 2-x \Rightarrow x = 2-y^2$$$

במקרה זה $0 \leq y \leq 2$ ו- $2 - y^2 \geq -y$ ולכן

$$S = \int_0^2 (2 - y^2 - (-y)) dy = \dots = \frac{10}{3}$$

נוסחה לחישוב נפח של גוף סיבוב:

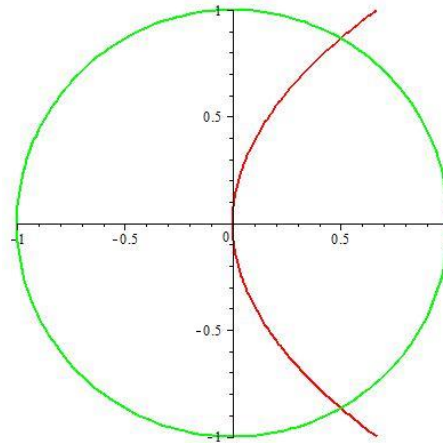
תהי $y = f(x)$ פונקציה רציפה ואי שלילית בקטע $[a, b]$. נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום המוגבל ע"י הגרף של $y = f(x)$ מלמעלה, ציר ה- x מלמטה והישרים $x = a$ ו- $x = b$ משמאל ומימין ניתן לחישוב ע"י הנוסחה:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

3. חשבו את הנפח של גוף סיבוב הנוצר ע"י סיבוב של התחום החסום ע"י

$$x^2 + y^2 = 1, y^2 = \frac{3}{2}x \text{ סביב ציר ה-} x.$$

פתרון:



נמצא את שיעור ה- x של נקודות החיתוך של שני הגרפים:

$$\begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y^2 = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$1 - x^2 = \frac{3}{2}x$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2 < -1 \text{ לא מתאים, כי } -1 \leq x \leq 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \text{ זהו שיעור ה-} x \text{ של נקודת החיתוך.}$$

הגוף הנוצר ע"י סיבוב התחום סביב ציר ה- x יהיה מורכב משני חלקים:

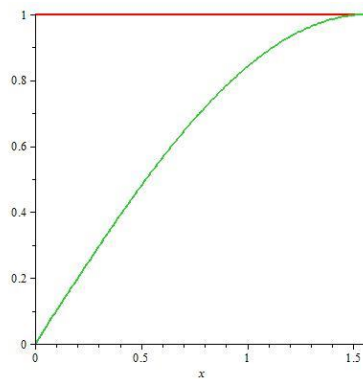
$$\text{החלק הנוצר ע"י סיבוב של הפרבולה } y = \sqrt{\frac{3}{2}x} \text{ בקטע } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ סביב ציר ה-} x$$

והחלק הנוצר ע"י סיבוב של קשת המעגל $y = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ סביב ציר ה- x .
 לסיכום נקבל :

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}x} \right)^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx = \dots = \frac{19\pi}{48}$$

4. חשבו את הנפח של גוף סיבוב הנוצר ע"י סיבוב של התחום הכלוא בין $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ סביב ציר ה- y .

פתרון:



$$y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y, 0 \leq y \leq 1$$

כלומר מסובבים את העקומה $x = \arcsin y$ בקטע $0 \leq y \leq 1$ סביב ציר ה- y .

$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy$$

נציב $\arcsin y = t$, במקרה זה $y = \sin t$ ולכן $dy = \cos t dt$ וגבולות האינטגרציה החדשים

הם $t = \arcsin 0 = 0$ גבול תחתון ו- $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ גבול עליון.

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t dt$$

עושים אינטגרציה בחלקים פעמיים

$$g = \sin t, f' = 2t \quad \text{ואז} \quad g' = \cos t, f = t^2$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t dt = \pi t^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t dt$$

ושוב אינטגרציה בחלקים: $g' = \sin t, f = 2t$ ואז $g = -\cos t, f' = 2$

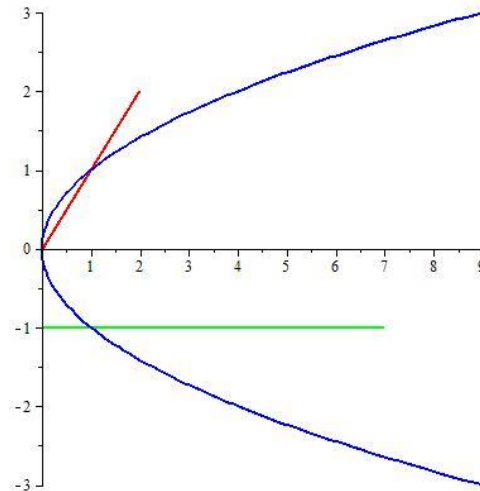
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t dt = \pi t^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t dt = \dots = \frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$$

נמשיך ונקבל

5. מצאו את נפח הגוף הנוצר כאשר מסובבים סביב הישר $y = -1$ את התחום הכלוא בין

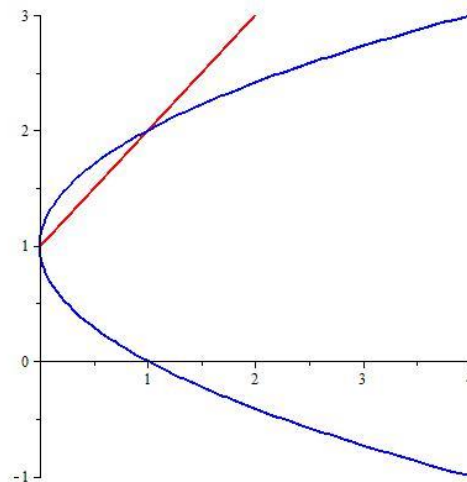
$$x = y^2 \text{ ל-} x = y$$

פתרון:



נעלה את התחום יחד עם הישר $y = -1$ (הישר הירוק בשרטוט) למעלה כך שהישר $y = -1$ יתלכד עם ציר ה- x .

התחום החדש כלוא בין $x = (y-1)^2$, $x = y-1$, ומסתובב סביב ציר ה- x .



הנפח של הגוף הנוצר שווה להפרש הנפחים של הגוף החיצוני הנוצר ע"י סיבוב של $x = (y-1)^2$ סביב ציר ה- x :

$$V_1 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx \text{ ולכן } x = (y-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y-1 \Rightarrow y = \sqrt{x} + 1$$

והגוף הפנימי הנוצר ע"י סיבוב של הישר $x = y-1$ סביב ציר ה- x

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x+1)^2 dx \text{ ולכן } x = y-1 \Rightarrow y = x+1$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx - \pi \int_0^1 (x+1)^2 dx = \dots = \frac{\pi}{2}$$

חישוב אורך קשת של עקומה חלקה

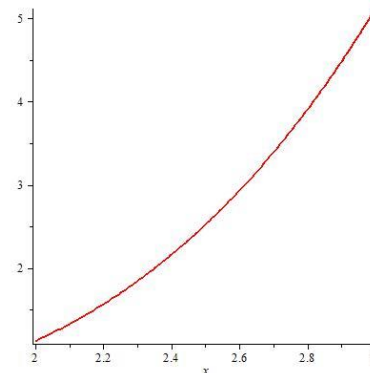
תהי $f(x)$ פונקציה חלקה ב- $[a, b]$.

אורך הקשת L של העקומה $y = f(x)$ מ- $x = a$ ל- $x = b$ מוגדר ע"י

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

6. מצאו את אורך הקשת של עקומה הנתונה ע"י $y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}$ מ- $x = 2$ ל- $x = 3$.

פתרון:

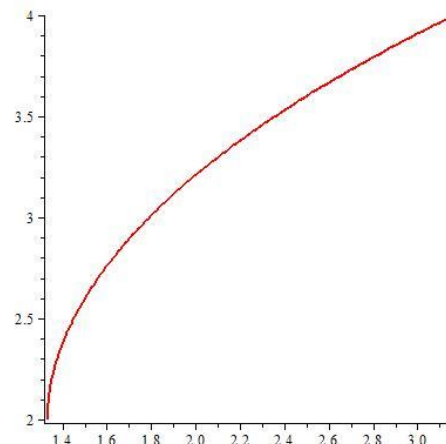


לפי הנוסחה הנ"ל

$$L = \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x^3}{4} - \frac{1}{x^3}\right)^2} dx = \dots = \int_2^3 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \dots = \frac{595}{144}$$

7. מצאו את אורך הקשת של עקומה הנתונה ע"י $24xy = y^4 + 48$ מ- $y = 2$ ל- $y = 4$.

פתרון:



ניתן לכתוב את x כפונקציה של y ולעשות אינטגרציה לפי y בקטע $2 \leq y \leq 4$

$$x = \frac{y^3}{24} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{8} - \frac{2}{y^2}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{y^2}{8} - \frac{2}{y^2}\right)^2} dy = \dots = \frac{17}{6}$$