

תרגילים ודוגמאות

22 באפריל 2020

מערכות משוואות

- פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

פתרון: נדרג את המטריצה המייצגת את המערכת:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & -7 & -8 & -5 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

הגענו לשורת סתירה ולכן למערכת זאת אין פתרון.

- פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

פתרון: נדרג את המטריצה המייצגת את המערכת:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

רואים ש x_3 הוא משתנה חופשי. נציב $x_3 = t$ שרירותי ואז נקבל

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{7}t = \frac{5}{7} \\ x_2 + \frac{8}{7}t = \frac{3}{7} \end{cases}$$

ומכאן ש

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{7} - \frac{4}{7}t \\ x_2 &= \frac{3}{7} - \frac{8}{7}t \end{aligned}$$

כלומר, לכל t מתקיים כי $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} - \frac{4}{7}t \\ \frac{3}{7} - \frac{8}{7}t \\ 0 + t \end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת. ולכן קבוצת הפתרונות היא

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{5}{7} - \frac{4}{7}t \\ \frac{3}{7} - \frac{8}{7}t \\ 0 + t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

• פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

פתרון: נדרג את המטריצה המייצגת את המערכת:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

רואים ש x_3 הוא משתנה חופשי. נציב $x_3 = t$ שרירותי ואז נקבל

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{7}t = 0 \\ x_2 + \frac{8}{7}t = 0 \end{cases}$$

ומכאן ש

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{4}{7}t \\ x_2 &= -\frac{8}{7}t \end{aligned}$$

כלומר, לכל t מתקיים כי $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7}t \\ -\frac{8}{7}t \\ t \end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת. ולכן קבוצת הפתרונות היא

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{4}{7}t \\ -\frac{8}{7}t \\ t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

• פתרו את המערכת (מעל \mathbb{R})

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

פתרון: נדרג את המטריצה המייצגת את המערכת

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + \frac{1}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

ולכן יש רק פתרון אחד שהוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (כלומר $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$)

• פתרו את המערכת (מעל \mathbb{R})

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 0x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 0x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

פתרון: נדרג את המטריצה המייצגת את המערכת

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{4}{3}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -\frac{7}{3} & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_4 \leftarrow -\frac{1}{8}R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{55}{24} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 4R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & \frac{28}{24} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{55}{24} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & \frac{28}{24} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{24} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{2}{24} & \frac{10}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{24} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{24} & \frac{26}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{24} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{24} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & \frac{1}{8} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

הגענו למדורגת קנונית. המשתנה x_5 הוא חופשי ולכן הוא יכול להיות כל ערך $x_5 = t$ ואז נוכל להסתכל על המערכת המדורגת אחרי שהצבנו $x_5 = t$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{34}{24}t = \frac{26}{8} \\ x_2 - \frac{16}{24}t = -1 \\ x_3 + \frac{13}{24}t = -\frac{3}{8} \\ x_4 - \frac{7}{24}t = \frac{1}{8} \end{cases}$$

ולכן נוכל למצוא את המשתנים האחרים (x_1, x_2, x_3, x_4) כתלות בערך t :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{26}{8} - \frac{34}{24}t \\
x_2 &= -1 + \frac{16}{24}t \\
x_3 &= -\frac{3}{8} - \frac{13}{24}t \\
x_4 &= \frac{1}{8} + \frac{7}{24}t
\end{aligned}$$

כלומר לכל ערך של t מתקיים כי $\begin{pmatrix} \frac{26}{8} - \frac{34}{24}t \\ -1 + \frac{16}{24}t \\ -\frac{3}{8} - \frac{13}{24}t \\ \frac{1}{8} + \frac{7}{24}t \\ t \end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת ולכן קבוצת הפתרונות היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{26}{8} - \frac{34}{24}t \\ -1 + \frac{16}{24}t \\ -\frac{3}{8} - \frac{13}{24}t \\ \frac{1}{8} + \frac{7}{24}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

אלגברת מטריצות

- חיבור מטריצות (למטריצות באותו גודל. מחברים רכיבי־רכיב):

-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- כפל בסקלר בין מטריצה A לסקלר (=מספר משדה) α :

-

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

-

$$(-3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \\ -15 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- כפל מטריצות:

- כפל מלא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot 9 & 1 \cdot 6 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 9 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 6 & 9 \\ 28 & 32 & 6 & 10 \\ 32 & 37 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 13 \\ -4 & 15 & 21 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0.5 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5 & -1 & 6 \\ 2.5 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- כפל עמודה: מצאו את העמודה השנייה של כפל המטריצות AB כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_2(AB) = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 31 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2(AB) = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 31 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2(AB) = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- כפל שורה: מצאו את השורה הראשונה של כפל המטריצות AB כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R_1(AB) = \begin{matrix} 1(4 & 5 & 6 & 7) + \\ 2(8 & 9 & 0 & 1) + \\ 0(1 & -1 & 1 & 0) \end{matrix} = (20 \quad 23 \quad 6 \quad 9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1(AB) = \begin{matrix} 1(4 & 5 & 6) + \\ 2(8 & 9 & 0) + \\ 0(1 & -1 & 1) \end{matrix} = (20 \quad 23 \quad 6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad R_1(AB) = \begin{matrix} 1(1 & 1 & 0) + \\ 2(0 & 0 & 5) + \\ 0(9 & 0 & 8) \end{matrix} = (1 \quad 1 \quad 10)$$