

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01/05) מועד ב', תשע"ה

מרצים: פרופ' אנדריי לרנר, ד"ר ודים זאב אוסטפנקו
משך המבחן: 150 דקות

חומר עזר: אסור (כולל מחשבון כיס)

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה ל-21 נקודות.

1. חשב את האינטגרל $\int_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ כאשר γ קו סגור ופשוט (לא חותך את עצמו)

שלא עובר דרך נקודת ראשית.

2. בדוק ש- $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}} \\ \sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$ שדה משמר בתחום $x > 0, y > 0, z > 0$ ומצא את הפוטנציאל $\phi(x, y, z)$.

3. (א) בעזרת נוסחת Green, הוכח שהאינטגרל $\frac{1}{2} \int_{\partial S} xdy - ydx$ שווה לשטח של התחום S .

(ב) מצא את שטח התחום החסום ע"י העקום $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds$ כאשר $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S מסמן את

הספרה בת רדיוס R עם מרכזה בנקודת הראשית, ו- \mathbf{N} וקטור נורמלי חיצוני.

5. מצא את שטח הפנים של המשטח

$$S = \{(x, y, z) : 3x - 3y + z = 12, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

6. (א) נתונה העתקה $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1x_2 + x_3x_4 \end{pmatrix}$. קבע האם

הקבוצה $M := \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא יריעה חלקה. נמק את תשובתך.

(ב) בעזרת נוסחת Stokes, חשב את האינטגרל $\int_{\gamma} ydx - xdy + 2dz$ כאשר העקום γ מוגדר ע"י תנאים $z = 0, x^2 + y^2 = 1$, כיוון חיובי.

בהצלחה!