

אופרטור סניארות - תרגילים 11

העתקות סניארות -

הצגה: יהיו V, W מ"ו מ"פ F . נאמר שסניארות $T: V \rightarrow W$ היא העתקה סניארות (הע"ס) אם מתקיים:

1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

2) $\forall v \in V, \forall \alpha \in F \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$

הצגה: אם T הע"ס אז $T(0_V) = 0_W$

תרגיל:

האם $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פ"ס? $T(x) = 2x$?

Ⓐ $T(x) = 2x$ - כן. (כמובן) אם התנאים:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad T(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 = T(x_1) + T(x_2)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad T(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha T(x)$

Ⓑ $T(x) = 2x + 1$ - לא. $T(0) = 1 \neq 0$. סניארות:

$T(\alpha x) = 2(\alpha x) + 1 = \alpha \cdot 2x + 1 \neq \alpha T(x) = \alpha(2x + 1)$

הצגה: יהיו V, W מ"ו מ"פ F . נאמר שסניארות $T: V \rightarrow W$ היא

הפיכה פ"ס קיטת הע"ס $S: W \rightarrow V$ (המ"ת"מת):

Ⓐ $T \circ S = Id_W$ (היבט סניארות) $S \circ T = Id_V$ (Ⓑ) (סניארות נוסף)

סניארות סה נוסף $S = T^{-1}$ ונאמר ש T היא אינסורטבילית פ"ס

(במ"פ אחידה) T אינסורטבילית פ"ס $\Leftrightarrow T$ חלף (וח) \leftarrow כחולן סניארות הע"ס T .

תרגיל:

אם $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ הע"ס $T(x, y) = (2x, x+y)$ פ"ס T אינסורטבילית?

Ⓐ תנאי:

חלף: יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ כן. $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. נניח סניארות

Ⓑ $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2)$ - אז $(2x_1, x_1 + y_1) = (2x_2, x_2 + y_2) \rightarrow$
 $2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$ $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \rightarrow y_1 = y_2$ $(x_1 = x_2)$



תאריך

כנס $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ פונקציה נתונה.

\leftarrow תמונה

י. ג. : יהי $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ונמצא נקודה $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ כפ. $T(x, y) = (a, b)$

$$T(x, y) = (2x, x+y) = (a, b) \rightarrow 2x = a \wedge x+y = b \rightarrow$$

$$\frac{a}{2} = x, \quad y = b - \frac{a}{2} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{a}{2}, b - \frac{a}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

הערה : \leftarrow קיימות 2 נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) כפ. T

$$1) T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2(x_1+x_2), x_1+x_2+y_1+y_2) = (2x_1+2x_2, x_1+x_2+y_1+y_2)$$

$$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (2x_1, x_1+y_1) + (2x_2, x_2+y_2) = (2x_1+2x_2, x_1+y_1+x_2+y_2)$$

\leftarrow פונקציה ליניאר

$$2) T(\alpha x_1, \alpha y_1) = (2\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha y_1) = \alpha(2x_1, x_1+y_1) = \alpha \cdot T(x_1, y_1)$$

יהיו V, W ו- $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V . יהי $\{w_1, \dots, w_n\}$

קבוצה בסיסית ב- W . אילו קיימת תמונה $T: V \rightarrow W$ (תמונה) :

$$T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2, \dots, \quad T(v_n) = w_n$$

הערה חשובה :

אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא תמונה (בסיס) של T פונקציה קיימת

$$T: V \rightarrow W$$

אם לא יחידה

אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא תמונה של T פונקציה קיימת

תוצאה :

סדרת סט סגור האם קיימת תמונה T :

$$\left. \begin{array}{l} T((1,0)) = (5,2) \\ T((0,1)) = (1,4) \end{array} \right\} T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{תמונה ע"י} \quad (10)$$

הגשמה. T תמונה של בסיס של \mathbb{R}^2 ופונקציה קיימת ויחידה

$$\left. \begin{array}{l} T((1,0,0)) = (1,1,1) \\ T((0,1,0)) = (0,0,0) \end{array} \right\} T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{תמונה ע"י} \quad (11)$$

התשובה: העל פונקציה קיימת אם לא יחידה. הסיבה: יש ∞ זוגות

השונים $\{ (1,0,0), (0,1,0) \}$ בסיס \leftarrow יש ∞ זוגות

$$T((0,0,1)) = (1,1,1) \quad \text{פונקציה קיימת. נכנס: נוסף}$$



תאריך

$$\begin{cases} T(2,0,0) = (1,0,0) \\ T(0,3,2) = (8,0,2) \\ T(2,3,2) = (-5,0,0) \end{cases} \quad \text{(נתונים)} \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (P)$$

הגשמה: הן כסא - סא קויט, ושגן ים סקונה ברוצרתה: מתקיים

עיתקל, $T(2,3,2) = (2,0,0) + (0,3,2)$ (כעית ד על T הים ואם)

ונקט: $T(2,3,2) = T(2,0,0) + T(0,3,2)$

כעית ד הים: $T(2,3,2) = T(2,0,0) + T(0,3,2)$

למ T א הים, מתקיים שיה סא וקאופ $(-5,0,0) = (1,0,0) + (8,0,2)$ לויט.

גרנד:

גרא $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוצגת עם מטריס הולרמ:

$$T(2,0,0) = (1,3,6) ; T(0,1,0) = (0,0,2) ; T(0,1,-1) = (9,0,-1)$$

מאוי T מצורה מסוימת.

רשור:

עוני מצב סא סאוי עכור $T(x,y,z)$ של $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, T מוצגת

ע בסיס של \mathbb{R}^3 וכן עניי סא וקטור כעית בסיס סה

$$(x,y,z) = \alpha(2,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,1,-1)$$

$$x = 2\alpha ; y = \beta + \gamma ; z = -\gamma$$

$$\alpha = \frac{x}{2} ; \beta = y + z ; \gamma = -z$$

$$(x,y,z) = \frac{x}{2}(2,0,0) + (y+z)(0,1,0) - z(0,1,-1)$$

(כעית T עניי סא סאוי עכור T של (x,y,z) שיה סא סאוי עכור של T):

$$T(x,y,z) = \frac{x}{2} T(2,0,0) + (y+z) T(0,1,0) + (-z) T(0,1,-1) =$$

$$= \frac{x}{2} (1,3,6) + (y+z) (0,0,2) - z (9,0,-1) =$$

$$= \left(\frac{x}{2} - 9z, \frac{3x}{2}, 3x + 2y + 3z \right)$$

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x}{2} - 9z, \frac{3x}{2}, 3x + 2y + 3z \right) //$$



תאריך

דוגמה: יהיו V, W ויהיו $E = \{v_1, \dots, v_n\}$

מבני $F = \{w_1, \dots, w_m\}$ של W, V במרחב.

האם $T: V \rightarrow W$ תעלה. (המטריצה הנ"ל של T ביחסים E, F ?)

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_F & \dots & [T(v_n)]_F \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ומתקיים: $[T]_F^E [v]_E = [T(v)]_F$ עבור $v \in V$.

ישו $[I]$ - המטריצה של זה.

הערה: אם T תעלה (הפיכה) אזי מתקיים $([T]_F^E)^{-1} = [T^{-1}]_F^E$

דוגמה:

נתון $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי $T(1) = 8x, T(x) = 5 + x^2, T(x^2) = 1 + x$

אם T הפיכה אזי T^{-1} נתונה על ידי

אם T הפיכה אזי T^{-1} נתונה על ידי

T^{-1} נתונה על ידי

פתרון:

נסתכן $a+bx+cx^2 = a \cdot \underline{1} + b \cdot \underline{x} + c \cdot \underline{x^2}$

יהי $v = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. נרצה v ביחסים E ויהי s ויהי $T(v)$ ביחסים F .

$$T(a+bx+cx^2) = aT(1) + bT(x) + cT(x^2) = 8ax + b(5+x^2) + c(1+x)$$

$$T(a+bx+cx^2) = (5b+c) + (8a+c)x + bx^2$$

$$8x = [T(1)]_S = (0, 8, 0)$$

$$5+x^2 = [T(x)]_S = (5, 0, 1)$$

$$1+x = [T(x^2)]_S = (1, 1, 0)$$

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^{-1}]_S = ([T]_S)^{-1}$$

יהיו s נתונה על ידי

$$[T^{-1}]_S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$[T^{-1}(a+bx+cx^2)]_S = [T^{-1}]_S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}a + \frac{1}{8}b + \frac{5}{8}c \\ b \\ a - 5c \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(a+bx+cx^2) = (-\frac{1}{8}a + \frac{1}{8}b + \frac{5}{8}c) + bx + (a-5c)x^2$$

הערה: T^{-1} נתונה על ידי

הערה: T^{-1} נתונה על ידי

