

## מופשטת 3 תשע"ה - תרגיל 5

1. חשבו את חבורת גלואה  $Gal(E/\mathbb{Q})$  עבור ההרחבות הבאות:

(א) שדה הפיצול של  $x^3 - 5$

(ב) שדה הפיצול של  $x^7 - 1$

(ג) שדה הפיצול של  $x^4 + 1$

2. חשבו את חבורת גלואה של  $E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  כאשר  $E$  הוא שדה הפיצול של  $x^4 + 1$  מעל  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .

3. העזרו בשאלה הראשונה וחשבו את המימד  $[\mathbb{Q}[2\rho_3 + \sqrt[3]{25} - 3\rho_3\sqrt[3]{5}] : \mathbb{Q}]$ . רמז: שימו לב שהשדה הזה מוכל בשדה הפיצול של סעיף א'. כדי למצוא פולינום מינימלי, מצאו את כל השורשים ע"י הפעלת כל האוטומורפיזמים על השורש.

4. יהי  $F$  שדה,  $f(x) \in F[x]$  פולינום ו-  $E$  שדה הפיצול שלו.

(א) יהי  $F \subseteq K \subseteq E$  ו-  $\sigma_0 : K \rightarrow E$  הומומורפיזם. הוכיחו כי קיים  $\sigma \in Gal(E/F)$  כך ש  $\sigma|_K = \sigma_0$ . (רמז:  $E$  הוא גם שדה הפיצול של  $f$  מעל  $K$ , השתמשו במשפט הסולם).

(ב) יהי  $b \in E$  ו-  $g(x) \in K[x]$  הפולינום המינימלי שלו מעל  $K$ . יהי  $b' \in E$  שורש של  $\hat{\sigma}_0(g)$ . הוכיחו כי קיים  $\sigma \in Gal(E/F)$  כך ש  $\sigma(b) = b'$  (היעזרו בסעיף הקודם).

(ג) הוכיחו כי קיים  $\sigma \in Gal(E/F)$  כך ש  $\sigma|_K = \sigma_0$  וגם  $\sigma(b) = b'$ .

5. יהי  $f(x) \in F[x]$  פולינום ספרבילי ו-  $E$  שדה הפיצול שלו. הוכיחו כי אם איברי  $Gal(E/F)$  פועלים על שורשי  $F$  בצורה טרנזיטיבית, אזי  $f$  הוא אי-פריק.