

מבוא לפיזיקה מודרנית
תורת היחסות הפרטית

פרדוקסים לכאורה בתורת היחסות

התארכות הזמן והתקצרות האורך יוצרות מספר תרחישים שנראים כמו חוסר קונסיסטנטיות של תורת היחסות. נראה את שני הפרדוקסים הקלאסיים ואת פתרונותיהם.

קודם כל, נחזור ונוכיח את התארכות הזמן, כלומר, נראה את זה שהפרש הזמן בין שני ארועים שנמצאים באותו מקום במערכת מסוימת הוא תמיד הקצר ביותר באותה המערכת. בעבר הראינו זאת באמצעות ניסוי מחשבה והעקרון השני של איינשטיין. כעת נשתמש בבוסט:

מערכת O' נעה ביחס ל- O במהירות β .

ב- O' , הזמן שעבר מהראשית עד הארוע $A=(T', 0)$ הוא T' .

שימו לב: שני הארועים קרו באותו מקום ב- O' .

אז ב- O הארוע A קורה בזמן $t = \gamma(t' - \beta x')$ = $\gamma T'$

אז הפרש הזמן בין הארועים הוא $\gamma T'$. **מש"ל.**

נוכיח באמצעות הטרינספורמציה ההפוכה:

נניח שהזמן של A ב- O הוא T .

אז מאחר ש- A קורה בראשית של O' והראשיות מתלכדות, אז המיקום של A ב- O הוא βT .

נבצע בוסט למערכת O' :

$$t' = \gamma(t - \beta x) = \gamma(T - \beta^2 T) = \gamma T(1 - \beta^2) = T \frac{1}{\gamma}$$

פרדוקס התאומים

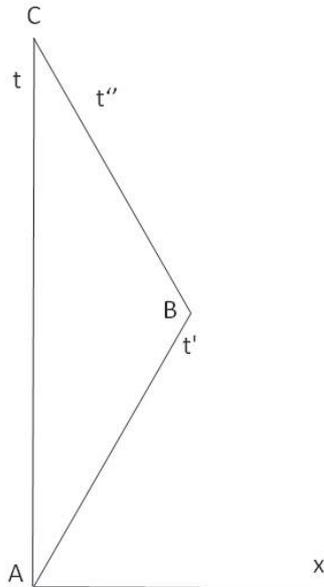
כוכבה ומנוחה הן תאומות זהות.

ביום הולדתן ה-20 (**ארוע A**, זמן 0 עבור שתייהן), כוכבה יוצאת בחללית מהירה (נאמר, $\beta=3/5$, $\gamma=5/4$) לחלל לעבר כוכב שמרחקו מכדוה"א הוא 3 שנות אור.

מאחר שזו מהירותה, כוכבה מגיעה לכוכב (**ארוע B**) לאחר 5 שנים: $T_B = \frac{3y}{3/5} = 5y$ ב-O

(המערכת של מנוחה)

מיד לאחר שהגיעה לכוכב, כוכבה חוזרת באותה מהירות לכדוה"א, אליו היא מגיעה ביום הולדתה ה-30 של מנוחה (כלומר, לאחר $t=T=10$ yrs, **ארוע C**).



שאלה: מהו גילה של כוכבה ביום זה?

- טיעון נאיבי:** פרידת התאומות ומפגשן ארעו באותו מקום במערכת של מנוחה ($x=0$), ולכן זוהי המערכת העצמית בה הפרש הזמן קצר ביותר. כלומר, הפרש הזמן עבור כוכבה ארוך יותר: $T' = T\gamma = 12.5$ yrs, והיא בת 32.5.
- טיעון נאיבי הפוך:** שני הארועים היו במערכת העצמית של כוכבה ($x'=0$), ולכן הזמן במערכת של כוכבה הוא הקצר יותר, אז $T' = T/\gamma = 8$ yrs, וכוכבה צריכה להיות בת 28 ביום המפגש.

ללא ספק, לאחר שהתאמות נפגשו, נוכל לקבוע נסיונית איזו מהן מבוגרת יותר (נוכל לקבוע זאת לפי השעונים שהן נושאות).
 לכן חייבת להיות תשובה אחת ששתייהן יכולות להסכים עליה. אחרת, התיאוריה אינה תואמת את המציאות.

אנו נראה שלשני הטיעונים שהועלו למעלה יש חלקים נכונים אך דרכי ההסקה מהם שוגות בכך שהן מתעלמות מכך שכוכבה אינה במערכת אינרציאלית אחת במהלך הטיסה, אלא מאיצה ממערכת אחת לשנייה, ועל הפתרון לקחת זאת בחשבון.

מה שכן אפשר לעשות הוא לחלק את מסעה של כוכבה לשני חלקים שבכל אחד מהם בנפרד היא כן במערכת אינרציאלית (אם כי אלה שתי מערכות שונות): החלק הלוך והחלק חזור.

1. טיעון נכון: נתבונן רק במסע הלוך:

תחילת המסע וסופו (אירועים A ו-B) הם באותו מיקום במערכת של כוכבה, ולכן זוהי המערכת בעלת הפרש הזמן העצמי (הזמן הקצר ביותר) בין שני האירועים.
 מאחר שלפי מנוחה מחצית המסע ארכה $T/2=5$ שנים, אז עבור כוכבה היא ארכה $T/2\gamma=4$ שנים.

משיקולי סימטריה, הטיעון נכון עבור המסע חזור: עבור כוכבה, גם הוא ארך 4 שנים.
 אז כוכבה הזדקנה רק ב-8 שנים בזמן שמנוחה הזדקנה ב-10 שנים.

שאלה: לכוכבה היתה תאוצה אינסופית (או גדולה מאוד) במשך זמן אפסי (או קצר מאוד) בארוע B. האם זה ישפיע על הזמן העצמי שלה?
 לתאוצה זו אין השפעה על התארכות/התקצרות הזמן, מאחר שאורך פרק זמן התאוצה הוא 0 במערכת של כוכבה (זמן עצמי), אז תרומתו לזמן בכל מערכת אחרת הוא

$$\Delta t' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} dt / \gamma = 0$$

בניסוי המיואונים במאיץ.

אז אם נחבר את שני הזמנים, נקבל 8 שנה,

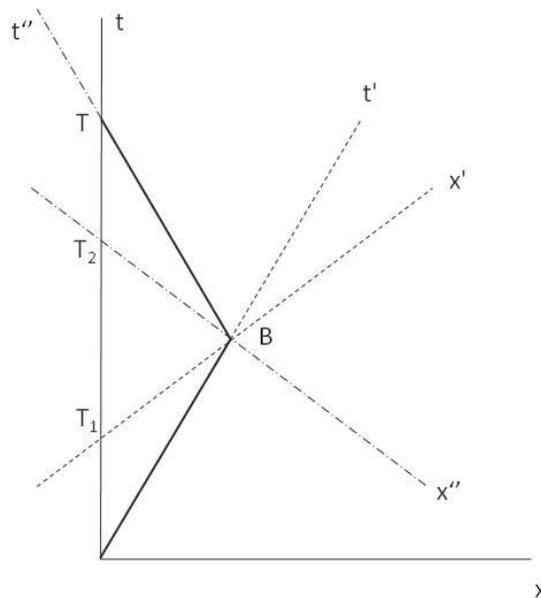
כלומר, עבור כוכבה הזמן שעבר היה קטן ב- γ מהזמן שעבר עבור מנוחה.

זו התשובה הנכונה.

אבל זה עדיין נכון שארועים A ו-C נמצאים באותו מיקום במערכת של מנוחה, ולכן היינו מצפים שהזמן העצמי שלה הוא הקצר משל השתיים.

אז מה הפתרון לפרדוקס?

הפתרון לפרדוקס הוא בכך שלתאוצתה של כוכבה ב-B ישנה השפעה דרמטית על איך הזמן העצמי של מנוחה נראה במערכת של כוכבה: חלק מהזמן של מנוחה חולף תוך זמן 0 במערכת של כוכבה!



בציור למעלה, קוי העולם של כוכבה בשני חלקי המסע מודגשים. ציר הזמן הראשון שלה בקטע הלוח הוא t' , ובקטע חזור הוא t'' .

לשם פשטות, אנו מניחים שכוכבה מאיצה מהר מאוד ביחס לזמן המסע הכולל, כך שמהירותה מתהפכת מיד ב-B וניתן לראות זאת כאילו תאוצתה אינסופית בזמן היפוך הכוון.

טיעונים נכונים:

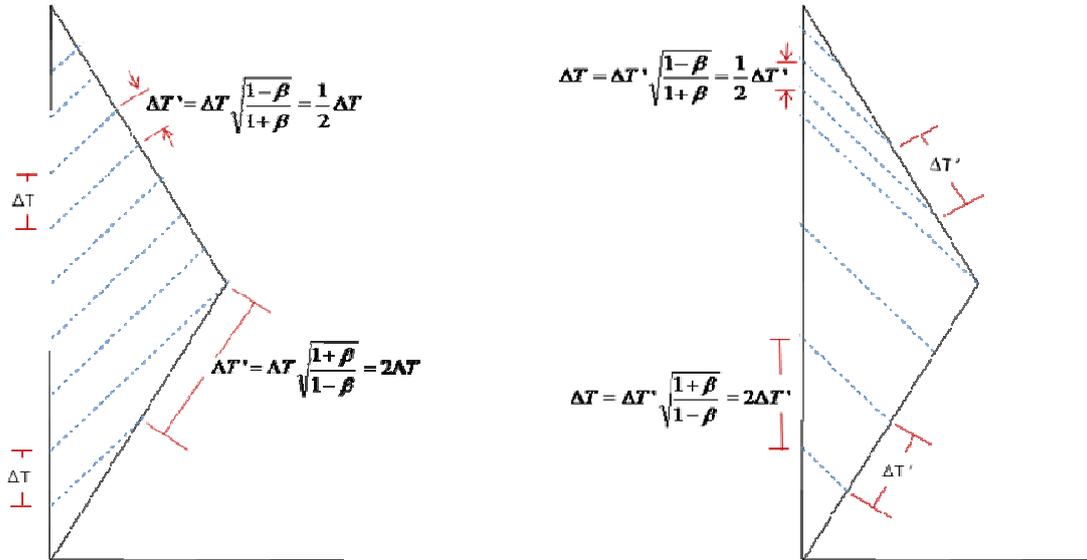
2. רגע קצר לפני ארוע B, ציר המרחב של כוכבה הוא x' , כך שהיא רואה שארוע B סימולטני עם ארוע T_1 על כדור"א.
3. רגע קצר אחרי ארוע B, ציר המרחב של כוכבה הוא x'' , כך שהיא רואה שארוע B סימולטני עם ארוע T_2 על כדור"א.
4. למעשה, כל הזמן שעברה מנוחה בין T_1 ל- T_2 עבר ב-0 זמן אצל כוכבה! כוכבה פשוט "פספסה" חלק מהזמן.
5. נחשב את הזמנים של T_1 ו- T_2 בשתי המערכות:
 - a. שימו לב שהראשית וארוע T_1 הם באותו מקום במערכת של מנוחה, לכן, במערכת של כוכבה, הזמן שעבר בין הארועים ארוך יותר, $T_1' = \gamma T_1$. (מאחר שכבר הישבנו ש- $T_1' = T/2\gamma = 4 \text{ yrs}$, אז $T_1 = 4 \text{ yrs}/\gamma = 3.2 \text{ yrs}$.)
 6. כך שכפי שציפינו, בין A ל- T_1 , כוכבה חווה התארכות זמן ביחס למנוחה, כי אלה שני אירועים שמתרחשים באותו מקום במערכת של מנוחה.
 - a. (מטעמי סימטריה, אפשר לראות שהזמן בין T_2 ל-T ארך גם הוא 3.2 שנים אצל מנוחה ו-4 שנים אצל כוכבה.)
7. למרות התארכות זמן זו, מאחר שפרק הזמן $T_2 - T_1$ שעבר על מנוחה לא עבר על כוכבה, כך שהמסע לקח לה פחות זמן.

נראה שכל אחת מהתאומות יכולה לדעת כמה זמן עובר במערכת של אחותה:

התאומות מסכימות מראש לשלוח ברכות זו לזו פעם בשנה.

מנוחה שולחת לכוכבה תשדורת רדיו פעם בשנה, כלומר בהפרשי זמן $\Delta T = 1 \text{ yr}$, ומעדכנת את אחותה בכל הקורה במשפחה בשנה שעברה. קוי העולם של התשדורות מקווקים בציוור משמאל למטה:

$$\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1.6}{0.4}} = 2$$



לפי אפקט דופלר, בזמן המסע הלוך, כוכבה מקבלת את התשדורות כל פרק זמן ארוך יותר,

$$\Delta T' = \Delta T \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \Delta T \sqrt{\frac{1.6}{0.4}} = 2\Delta T = 2yr$$

כלומר, כוכבה מקבלת 2 תשדורות ממנוחה במהלך 4 שנות המסע הלוך (בשעון שלה).

בזמן המסע חזרה, כוכבה מקבלת את התשדורות כל $\Delta T' = \Delta T \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{2} \Delta T = \frac{1}{2} yr$ כי

המהירות הופכת סימן). לכן היא מקבלת 8 תשדורות במהלך 4 שנות המסע חזור.

בסה"כ כוכבה סופרת 10 תשדורות, כלומר 10 שנים במערכת של מנוחה.

גם כוכבה שולחת תשדורות למנוחה פעם בשנה בשעון שלה ($\Delta T' = 1 yr$), ומספרת לה על כל

קורות עכברי המעבדה שטסים איתה בחללית. הציור הימני למעלה מתאר תשדורות אלה.

במהלך המסע הלוך, מנוחה מקבלת את התשדורות של כוכבה כל פרק זמן ארוך יותר,

$$\Delta T = \Delta T' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 2\Delta T' = 2yr$$

אז את 4 התשדורות שכוכבה שלחה במסע הלוך, מנוחה מקבלת תוך 8 שנים.

את 4 התשדורות שכוכבה שולחת במהלך המסע חזור, מנוחה מקבלת כל

$$\Delta T = \Delta T' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{2} \Delta T' = \frac{1}{2} yr$$

בסה"כ קיבלה מנוחה 8 תשדורות מכוכבה (כמנין השנים שעברו במערכת של כוכבה).

אז כל אחת מהתאומות יודעת כמה שנים חלפו עבור אחותה.

אלא שהיא מקבלת את התשדורות שמצינות את מעבר השנים הללו בקצב לא אחיד.

שימו לב שבמהלך המסע הלוך של כוכבה, תאומה א' (מנוחה או כוכבה) תראה שהזמן העצמי שלה אכן קצר משל תאומה ב', משום שהתשדורות – שנשלחו ע"י תאומה ב' כל שנה בזמן העצמי של ב', מגיעות אל א' כל שנתיים לפי השעון של א' (ומתוך ידיעת אפקט דופלר, א' תוכל לחשב שהתארכות הזמן היא בפקטור $\gamma=1.25$). כך שכל זמן שאין תאוצה, המצב אכן סימטרי בין שתי האחיות.

שאלה לתרגול: כמה זמן עבר במערכת של כוכבה אם במקום להפוך את כוון מהירותה

בפתאומיות, היא מאיצה בתאוצה סופית וקבועה (התאוצה קבועה במערכת של מנוחה) במשך פרק

הזמן $t \in (-pT, pT)$, כאשר אמצע המסלול הוא זמן $t=0$ ו- $p < 1$?

שאלת בית: אותה שאלה, כאשר כוכבה מאיצה בתאוצה סופית וקבועה במערכת העצמית שלה

(Proper acceleration)?

פרדוקס המוט והאסם

נתון אסם באורך L. נתון מוט שבמערכת המנוחה שלו, אורכו $P = 1.5 L$. המוט עף לכוון דלת

האסם במהירות $\beta = 0.87$, כך ש- $\gamma \sim 2$.

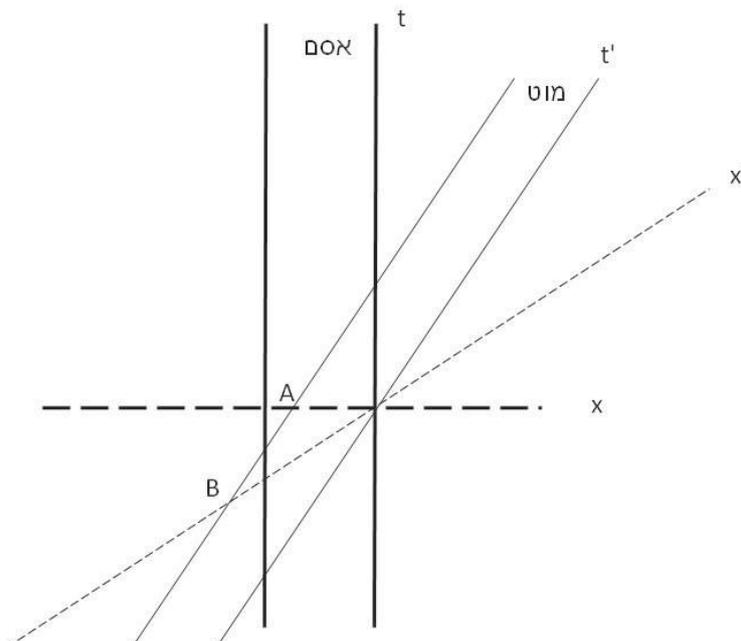
במערכת האסם (O), המוט מתקצר לכדי $P/\gamma = 0.75 L$, כך שכולו יכול להיות מוכל בתוך האסם.

אך במערכת המוט (O'), האסם מתקצר לאורך $L/\gamma = L/2$, כך שהמוט בולט משני קצות האסם.

מי צודק: המוט או האסם?

אם נסגור את הדלת האחורית של האסם ברגע הנכון, האם נמצא שכל המוט בתוך האסם, או שחלקו מחוצה לאסם?

פתרון הפרדוקס נמצא באי שיימור הסימולטניות: שני הצופים צודקים, משום שהארועים של שני קצות המוטות שהם מתארים כסימולטניים, אינם אותם ארועים עבור שני הצופים. נתבונן בדיאגרמה המתארת את הארועים השונים במערכת האסם:



קוי העולם של קצות האסם אנכיים, ואלה של קצות המוט מוטים ימינה. ראשית הצירים היא כאשר הקצה הקדמי של המוט נוגע בקצה הקדמי של האסם (מבפנים). במערכת האסם, הארוע שמתרחש במקום של הקצה האחורי של המוט וסימולטני עם הראשית הוא ארוע A, ולכן האסם רואה שברגע זה הקצה האחורי של המוט נמצא בתוך האסם. במערכת המוט, הארוע שמתרחש במקום של הקצה האחורי של המוט וסימולטני עם הראשית הוא ארוע B, ולכן המוט רואה שברגע זה הקצה האחורי שלו נמצא מחוץ לאסם.

נמצא את קואורדינטות הארועים הללו:

במערכת האסם, קוי העולם של הקצה הקדמי והאחורי של המוט הם, בהתאמה,

$$x_1 = \beta t$$

$$x_2 = \beta t - \frac{P}{\gamma}$$

כאשר התחשבנו בהתקצרות אורך המוט במערכת האסם.

הזמן של ארוע A ב-O הוא $t=0$, ולכן המיקום שלו ב-O הוא $x_A = x_2(t=0) = -P/\gamma$.

במערכת המוט (O'), הקואורדינטות של A הן

$$t'_A = \gamma(t - \beta x_2(t)) \Big|_{t=0} = \beta P$$

$$x'_A = \gamma(x_2(t) - \beta t) \Big|_{t=0} = -P$$

אז רואים כי:

- זמן ארוע A הוא חיובי עבור המוט, בשעה שהוא סימולטני עם הראשית (0) עבור האסם.
- עבור המוט, אורכו נשאר תמיד P (כפי שהוא צריך להיות).

את הקואורדינטות של B הכי פשוט לכתוב במערכת המוט:

$$t'_B = 0$$

$$x'_B = -P$$

שימו לב ש- $x' = -P$ הוא תמיד ערך הקואורדינטה של הקצה האחורי של המוט במערכת המוט.

שימו לב גם שמיקום ארוע A עבור המוט הוא אותו מיקום של ארוע B (המיקום מתקבל ע"י הסעת הארוע לאורך קו שמקביל לציר ה- t').

במערכת האסם, ארוע B מתרחש ב-

$$t_B = \gamma(t'_B + \beta x'_B) = -\gamma\beta P$$

$$x_B = \gamma(x'_B + \beta t'_B) = -\gamma P$$

שימו לב שארוע B הוא SL ביחס לראשית בשתי המערכות, כפי שהוא צריך להיות (בוסט אינו משנה תכונה זו של ארועים).

עכשיו ננסה להתחכם בדרכים שונות ולהכריח את הפרדוקס לחשוף את עצמו.

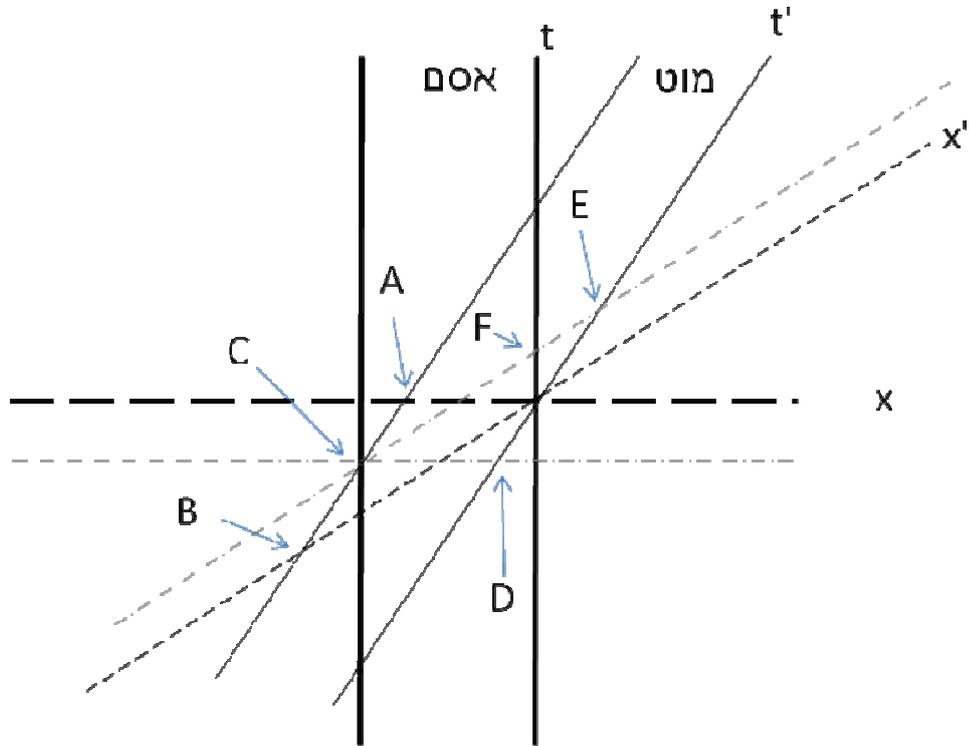
אולי נמצא שהמציאות המתוארת ע"י תורת היחסות בכל זאת פרדוקסלית?

נניח שהדלת האחורית של האסם נסגרת ברגע שהקצה האחורי של המוט נכנס לתוך האסם (ארוע C בצירור למטה).

במערכת האסם, בזמן זה הקצה הקדמי של המוט עדיין בתוך האסם (ארוע D).

במערכת המוט, בזמן זה הקצה הקדמי של המוט כבר יצא מהאסם (ארוע E).

אז צופים בשתי המערכות לא מסכימים על מה שקורה בשל אי-שימור הסימולטניות.



נראה מהן הקואורדינטות של C: במערכת האסם, C היא במיקום

$$x_c = -L = \beta t_c - \frac{P}{\gamma}, \text{ כאשר השתמשנו במשוואת הישר } x_2, \text{ עליו נמצאת C.}$$

$$t_c = \frac{1}{\beta} \left(\frac{P}{\gamma} - L \right) \text{ אז הזמן של C הוא}$$

במערכת המוט, הקואורדינטות של C הן

$$t'_c = \gamma(t_c - \beta x_c) = \gamma \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{P}{\gamma} - L \right) + \beta L \right) = \frac{1}{\beta} \left(P - \frac{L}{\gamma} \right)$$

$$x'_c = -P$$

נראה היכן נמצא הקיר הקדמי של האסם בזמן t'_c כפי שרואה זאת המוט, כלומר, את מיקום

הארוע F:

במערכת המוט, לקיר הקדמי משוואת הקו $x' = -\beta t'$. אז בזמן t'_c , הקיר הקדמי נמצא ב-

$$x'_F = -\beta \frac{1}{\beta} \left(P - \frac{L}{\gamma} \right) = \frac{L}{\gamma} - P$$

עם נתוני הבעיה, $\gamma=2$, $P=1.5L$, מקבלים ש- $x'_F = L(0.5 - 1.5) = -L < 0$, כלומר, מאחורי הקצה הקדמי של המוט.

אז רואים שעבור המוט, כאשר קצהו האחורי בדיוק נכנס לאסם, קצהו הקדמי כבר יוצא מהאסם, מה שאינו נכון עבור הצופה במערכת האסם.

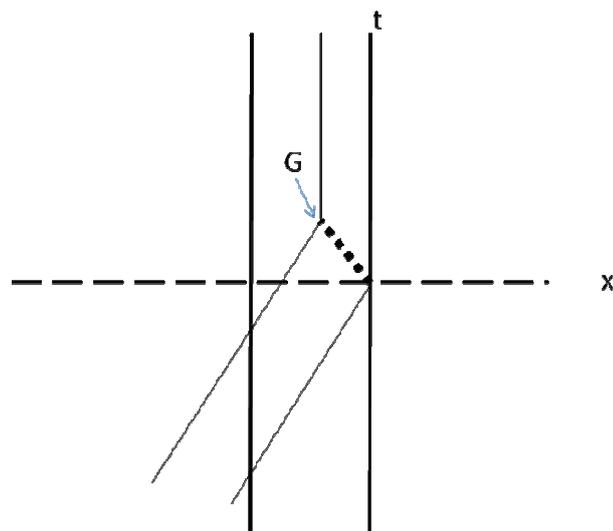
נניח שהדלת הקדמית של האסם סגורה, כך שהמוט נתקע בה ונעצר. בודאי אז נוכל לראות אם חלקו האחורי של המוט נמצא בתוך האסם או מחוצה לו!

אלא שהמוט לא יעצר בבת אחת, משום שזה מצריך מעבר של מידע ("נתקעתי!") מקצהו הקדמי של המוט לקצהו האחורי באפס זמן.

כאשר המוט פוגע בדלת, חלקו הקדמי נדחס, ויוצר גל לחץ שעובר לחלקו האחורי.

גל הלחץ (המידע) יכול לעבור לכל המהר במהירות האור.

בציור למטה, גל הלחץ (קו עבה שבור) נע לאחורי המוט במהירות האור.



עד שגל הלחץ מגיע אל הקצה האחורי ארוע G), קצה זה ממשיך לנוע באותה מהירות.

לכן המוט נלחץ ומתקצר.

כאשר הקצה האחורי נעצר, הוא כבר נמצא בתוך האסם.

כעת המוט במנוחה ביחס לאסם, ושני הצופים (שעכשיו הם באותה מערכת) אכן מסכימים שהוא נמצא בתוך האסם ושהוא התקצר בעקבות ההתנגשות עם קיר האסם, כך שאין פרדוקס.

פרדוקס המוט בצינור

זוהי גרסה מתוחכמת של פרדוקס המוט והאסם עם מימד נוסף. נתון צינור צר וארוך ובתחתיתו פתח באורך L . בתוך הצינור, מוט באורך $L-a$ (כאשר $a \ll L$) ובאותו הרוחב כמו הצינור נע לאורך הצינור. אם הם באותה המערכת, המוט מעט קצר מהחור ואמור ליפול דרכו (נניח שהמוט והצינור צרים מספיק, כך שכל מהירות אנכית מספיקה להוציא את המוט דרך החור מבלי שיתקע בדופן הצינור בצד השני של החור). הדבר בודאי נכון במערכת הצינור, משום שהמוט מתקצר. אך במערכת המוט, המוט ארוך מהחור בצינור ולכן לא יפול דרכו.

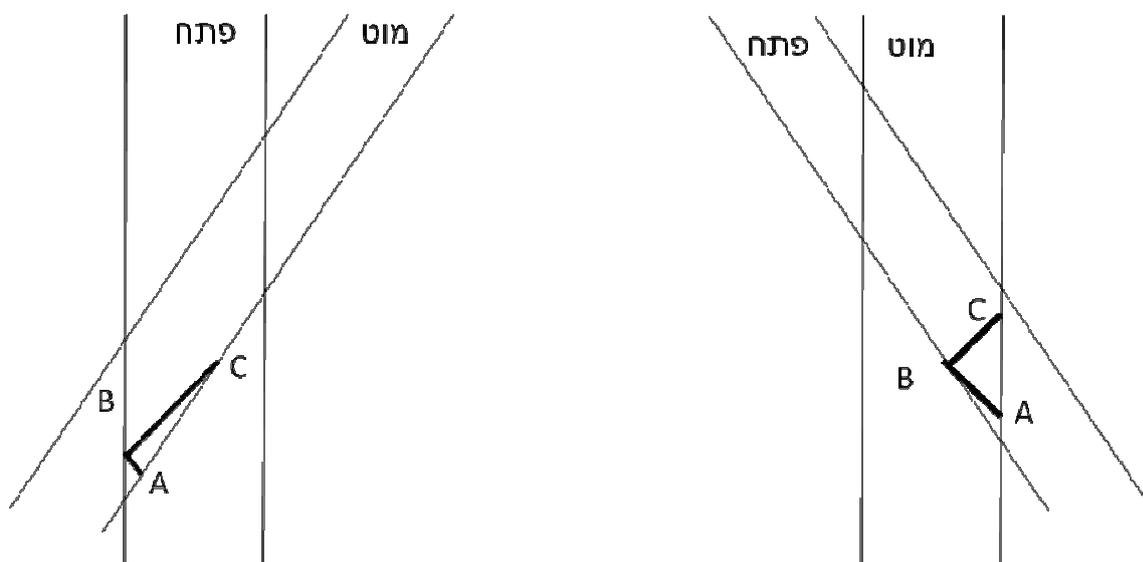
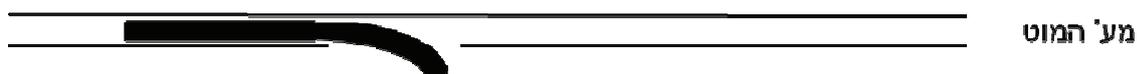


כיצד זה יתכן? הרי לאחר מספיק זמן, נוכל לעצור את המוט ולראות אם הוא המשיך בתנועתו בצינור או שמא נפל דרכו. שני התרחישים יובילו לתוצאות נסיוניות שונות בתכלית, ולא יתכן ששניהם נכונים.

הפתרון הוא בכך שבתורת היחסות אין גוף שהוא באמת קשיח, משום שהכוח בין מולקולות אינו יכול להתקדם מהר ממהירות האור. ראינו זאת במקרה של המוט שפגע בקדמת האסם. לוקח זמן עד שהכוח שמפעילים חלקי המוט שבתוך הצינור מגיע אל חלקיו שמעל לפתח, ובמשך זמן זה החלקים שמעל לפתח מאיצים אל מחוץ לצינור.

כאשר הקצה הקדמי של המוט תלוי מעל הפתח, פועל עליו כוח כבידה שמכווץ את המוט. בארוע A , הקצה הקדמי מפעיל כוח על חלקי המוט שמאחוריו.

הכוח מתקדם לאחור במהירות הקול, שהיא איטית ממהירות האור (בציור – שווה לה), ומגיע אל חלק המוט שעדיין מוחזק ע"י הצינור (נמצא מחוץ לפתח) ב-B. חלק המוט שבתוך הצינור מפעיל כוח על החלק שמחוץ לצינור, אולם כוח זה "מגיע" אל קדמת הצינור רק ב-C. בינתיים, בין A ל-C, קדמת הצינור נפלה מספיק כדי לצאת מבעד לפתח.



למעשה, ניתן לראות מכאן שגם אם המוט ארוך מן הפתח כשהם באותה המערכת, הוא עדיין יתכופף ויפול, ובלבד שהמוט והצינור דקים מספיק שבמשך הזמן שלוקח למוט לעבור את הצינור תאוצת הכובד מספיקה כדי להזיז את המוט את המרחק האנכי הדרוש כדי לצאת מהצינור (תנאי שרחוק מלהתקיים בחיי היום-יום).