פתרון תרגיל בית 3 אלגברה מופשטת 2

1. תארו את האיברים ההפיכים של $\mathbb{Z}_4\left[x\right]$.
ראינו בתירגול שהאיברים ההפיכים ב$R[x]$ אלו פולינומים שהאיבר החופשי שלהם הפיך ושאר המקדמים הם נילפוטנטים.
ולכן אצלנו האיברים ההפיכים הם $\pm 1 + 2xp(x)$ לכל $p(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$.

2. הוכיחו כי $R[[x]][x^{-1}] = R((x))$.
איבר כללי של $R[[x]][x^{-1}]$ הוא מהצורה

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^k x^i\right) x^{-k} = \sum_{j=-n}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j} a_{j-k}^k\right) x^j$$

שימו לב שהמקדם של כל מונום הוא סכום סופי ולכן קבלנו איבר של $R((x))$.
מצד שני, איבר כללי של $R((x))$ הוא מהצורה

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k x^k = a_{-n}x^{-n} + \cdots + a_{-1}x^{-1} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$$

שזהו איבר ב$R[[x]][x^{-1}]$.

3. יהי F שדה. נסמן $R_1 = F[x]$. לכל $n \geq 0$, נגדיר את החוג $R_n = F\left[x^{1/n!}\right]$.
נשים לב שמתקיים $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \ldots$ שכן בכל שלב אנחנו מוסיפים איבר שהוא שורש $t^n = x^{1/(n-1)!}$.
כעת נסתכל על האיחוד $R = \bigcup_n R_n$ - זהו חוג.

(א) הראו כי לכל $0 < r \in \mathbb{Q}$, $x^r \in R$. השתכנעו שאיברי R הם סכום של איברים מהצורה αx^r עבור $\alpha \in F$, $0 < r \in \mathbb{Q}$.

(ב) הראו שכל החוגים R_n איזומורפיים זה לזה, אבל R לא איזומורפי להם.

פתרון:

א. מספיק להראות ש $R \ni x^{1/n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (למה?) . ואמנם $x^{1/n} \in R_n$ שכן $x^{1/n} = x^{(n-1)!}x^{1/n!}$.

ב. מספיק להראות ש$R_{n+1} \cong R_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

נבנה איזומורפיזם $\varphi\colon R_{n+1} \to R_n$ המוגדר ע"י $\varphi(x^{1/(n+1)!}) = x^{1/n!}$.

זהו אכן הומומורפיזם, על וחח"ע (בדקו!).

R לא איזומורפי לR_1 למשל כי R_1 נוצר ע"י איבר אחד x מעל F, ואילו לאור סעיף א R אינו נוצר סופית מעל F.

4. הוכח שב $M_n(F)$ אין מערכת של $(n+1) \times (n+1)$ יחידות מטריצות.

פתרון1:

נסמן את המערכת יחידות המטריצות מסדר $(n+1) \times (n+1)$ ב e_{ij}.

$F^n \subseteq M_n(F)$ הוא תת מרחב לינארי (חושבים עליו בתור המטריצות האלכסוניות) זהו גם תת-חוג.

לכל i גם Fe_{ii} הוא תת-מרחב ממימד 1 [וגם תת-חוג בלי יחידה], מכיוון ו $\sum e_{ii} = I$ אז התת מרחב $A = \sum Fe_{ii}$ הוא גם תת חוג (עם יחידה).

נטען שעבור $i \neq j$ מתקיים $Fe_{ii} \cap Fe_{jj} = 0$: אמנם: נניח $a = \alpha e_{ii} = \beta e_{jj}$ אז $a = e_{ii}\alpha = e_{ii}e_{ii}\alpha = e_{ii}a = e_{ii}e_{jj}\beta = 0$.

זה מוכיח ש$A = Fe_{11} \oplus Fe_{22} \oplus \cdots \oplus Fe_{n+1,n+1}$ הוא ממימד $n+1$.

בנוסף $A \subseteq F^n$ תת מרחב ממימד n בלבד ולכן בהכרח יש מטריצה לא אלכסונית $X \in A$.

נסמן את יחידות המטריצות הסטנדרטיות של $M_n(F)$ בE_{ij}, מכיוון ו A היא גם תת חוג, וגם מרחב לינארי כל $E_{ii}XE_{jj} = X_{ij}E_{ij} \in A$.

מכיוון וX לא אלכסונית, קיימים $i \neq j$ כך ש $X_{ij} \neq 0$ ואז $\frac{1}{X_{ij}}X_{ij}E_{ij} = E_{ij} \in A$.

זה אומר שאפשר לרשום $E_{ij} = \sum \alpha_i e_{ii}$ עבור איזשהם $\alpha_i \in F$, אבל אז מהתכונות של יחידות מטריצות נקבל

$$\begin{aligned} E_{ij}^2 &= \sum \alpha_i^2 e_{ii} = 0 \\ \alpha_i &= 0 \end{aligned}$$

וזו סתירה.

5. הוכח שאין שיכון (עם יחידה) $M_2(F) \hookrightarrow M_3(F)$.

פתרון :

נניח בשלילה שיש כזה שיכון φ

נסמן את התמונות של $e_{12}, e_{21} \in M_2(F)$ ב $\varphi(e_{12}) = A, \varphi(e_{21}) = B$.

מכיוון שזה שיכון של חוגים (עם יחידה) מתקיים $A^2 = B^2 = 0$ ו $AB + BA = I$.

ע"י בחירת בסיס , אפשר לבחור שA הוא משולשי עליון מהצורה $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(שימו לב שבחירת בסיס שונה נותן איזומורפיזם של חוגים, אפשר לראות זאת מהעובדה ש $End(F^n) \cong M_n(F)$ כחוגים).

ואז נשארים עם מעט אילוצים לינאריים שקל לראות שאין להם פתרון :

רושמים $B = (b_{ij})$ ומקבלים דרישות :

$$\begin{aligned} xb_{21} &= 1 \\ yb_{31} &= 1 \\ xb_{21} + yb_{31} &= 1 \end{aligned}$$

שכמובן, אין להן פיתרון.

הערה : אנחנו נלמד הוכחה קלה וכללית יותר כשנלמד על מודולים.