פתרונות לתרגיל 6 – מבוא לאלגברה ליניארית

.1

(א) $\mathbb{R}^4 \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ a' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ a+a' \\ 0 \end{pmatrix}$

סגירות לכפל בסקלר: $c \cdot \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca+cb \\ cb \\ ca \\ 0 \end{pmatrix}$

(ב) $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a+b+c=0 \right\}$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: נקח שני וקטורים $V \ni \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, מכיוון שהם ב-$V$ אז $a+b+c=0$ וגם $a'+b'+c'=0$.
מתקיים ש- $V \ni \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ כי סכום האיברים הוא $(a+b+c)+(a'+b'+c')=0+0=0$.

סגירות לכפל בסקלר: ניקח $V \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ כלומר ש- $a+b+c=0$. ונקח סקלר k. אזי:
$V \ni \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot k$ כי סכום האיברים הוא $ka+kb+kc = k(a+b+c)=0$.

(ג) $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a \geq 0 \right\}$.

זהו לא ת"מ וקטורי! שימו לב שהוא כן סגור לחיבור, אבל הוא לא סגור לכפל בסקלר שכן למשל $V \ni \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אבל $V \notin \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1)$.

(ד) $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור:
$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \left(\alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (\alpha + \alpha') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (\beta + \beta') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$.

סגירות לכפל בסקלר:
$k \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (k\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (k\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$.

.2

<u>פתרון</u>

א. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y \neq 0$:

$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(2x,y)$.

ב. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y \neq 0$:

$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(2x,0)$.

ג. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y,x \neq 0$

$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(4x,4y)$.

ד. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y \neq 0$:

$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)$.

.3

פתרון:

נבדוק את התנאים לתת מרחב עבור כל אחת מהקבוצות (נשתמש בקריטריון המקוצר):

א. מטריצת האפס היא סימטרית ולכן 0 בתת המרחב. יהי A,B מטריצות סימטריות ו־$\alpha \in \mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A + B$ סימטרית, $(\alpha A+B)_{ij} = \alpha (A)_{ij} + (B)_{ij} = \alpha (A)_{ji} + (B)_{ji} = (\alpha A+B)_{ji}$ ולכן $(\alpha A+B)$ גם כן סימטרית ונמצאת בתת מרחב.

ב. מטריצת האפס היא אלכסונית ולכן נמצאת בתת מרחב. יהיו A,B מטריצות סימטריות $\alpha \in \mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A + B$ אלכסונית, $(\alpha A+B)_{ij} = \alpha (A)_{ij} + (B)_{ij}$ ולכן $(\alpha A+B)_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i=j$ ולכן $(\alpha A+B)$ אלכסונית.

ג. מטריצת האפס היא אלכסונית ולכן נמצאת בתת מרחב. יהיו A,B מטריצות משולשית עליונה $\alpha \in \mathbb{F}$ נוכיח כי $\alpha A + B$ משולשית עליונה, $(\alpha A+B)_{ij} = \alpha (A)_{ij} + (B)_{ij}$ ולכן $(\alpha A+B)_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i<j$ ולכן $(\alpha A+B)$ משולשית