תורת הקבוצות — תרגיל בית 5

חיים שרגא רוזנר

י"א באייר, תשע"ה*

תקציר

מונוטוניות ורציפות, חילוק סודרים עם שארית.

תזכורות

1. פונקציית סודרים $f\colon ON\to ON$ היא **מונוטונית** אם לכל שני סודרים $\alpha<\beta$ מתקיים $f(\alpha)<f(\beta)$; פונקציה מונוטונית כזו היא **רציפה** אם לכל סודר גבולי β מתקיים $f(\beta)=\sup\{f(\gamma):\gamma<\beta\}$.

2. נניח כי f פונקציית סודרים מונוטונית ורציפה, β סודר גבולי ו־B תת־קבוצה של β המקיימת $\sup B=\beta$. אזי $f(\beta)=\sup\{f(\gamma):\gamma\in B\}$.

1 מונוטוניות ורציפות

1. <u>רשות</u>: פונקציה מונוטונית מקיימת לכל סודר α בתחום, $f(\alpha)\geq\alpha$.

2. <u>רשות</u>: נגדיר את טופולוגיית הסדר (order topology) על הסודר α באמצעות בסיס המורכב מהקבוצות הבאות:

$$
\begin{aligned}
[0,\beta) &= \{\gamma\colon \gamma<\beta\}=\beta\\
(\beta_1,\beta_2) &= \{\gamma\colon \beta_1<\gamma<\beta_2\}=\beta_2\setminus S(\beta_1)\\
(\beta,\alpha) &= \{\gamma\colon \beta<\gamma<\alpha\}=\alpha\setminus S(\beta)
\end{aligned}
$$

שימו לב כי בבסיס זה נמצאים כל הנקודונים המכילים סודר עוקב וכן הנקודון $\{0\}$, אך אין נקודונים עבור סודרים גבוליים. הראו כי בטופולוגיה זו, פונקציה מונוטונית היא רציפה אם ורק אם היא מקיימת את ההגדרה לעיל.

3. הראו כי עבור $\alpha>0$, $f(\beta):=\alpha\cdot\beta$ היא פונקציה מונוטונית ורציפה.

תוצאה אם β גבולי, $B\subseteq\beta$ המקיימת $\sup B=\beta$, אזי $\sup\{\alpha\cdot\gamma\colon\gamma\in B\}=\alpha\cdot\beta$.

4. הפריכו:

* להגשה עד יום **שני** כ"ב באייר (11 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

(א) הפונקציה $f(\beta)=\beta+\alpha$ היא מונוטונית ורציפה.

(ב) יהי $\alpha>0$. הפונקציה $g(\beta)=\beta\cdot\alpha$ היא מונוטונית ורציפה.

(ג) מצאו סודר גבולי β ותת־קבוצה שלו B המקיימת $\beta=\sup B$ אך $\beta\neq B$ עבורם $g(\beta)\neq\sup\{g(\gamma):\gamma\in B\}$.

2 שונות

1. יהיו $\alpha_1\leq\alpha_2$, $\beta_1\leq\beta_2$. הוכיחו כי $\alpha_1+\beta_1\leq\alpha_2+\beta_2$. היעזרו בתרגיל בית 4 (פרק 2 שאלה 1).

3 חילוק עם שארית

1. הוכיחו כי לכל α,β כך ש־$\beta>0$ קיימים ויחידים γ,δ כך ש־$\delta<\beta$ ו־$\alpha=\beta\gamma+\delta$. מציאת $\gamma.\delta$ אלו נקראת **חילוק עם שארית**. נסמן, בתנאים אלו, $\gamma:=\alpha/\beta$ ו־$\alpha \mod \beta:=\delta$.

הדרכה הראו את טענת העזר הבאה: נניח $0<\beta\leq\alpha$. אזי קיים γ גדול ביותר כך ש־$\beta\cdot\gamma\leq\alpha$.

2. חשבו את $\omega \mod 5$ ואת $(\omega+\omega) \mod \omega$.

ב ה צ ל ח ה!