המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 05 – סמסטר ב' תשע"ו, 16.8.16 מבחן מועד ב'

המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר נחשוני, אלעד עטייא, איתמר שטיין

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.
ג. הניקוד על שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, אך הציון הסופי לא יעבור את 100.
ד. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.
ה. משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

1. א. הוכיחו שבכל מרחב טופולוגי X ולכל תת קבוצה A מתקיים: $cl(A^c)=(\mathrm{int}(A))^c$

ב. במרחב נורמי $(C[0,1],\|\cdot\|_{\max})$ למצוא קבוצה פתוחה שהיא לא פתוחה במרחב נורמי

$(C[0,1],\|\cdot\|_1),\ \|\mathrm{f}\|_1=\int_0^1|f(x)|\,dx$.

2. הוכיחו שמכפלה סופית של מרחבים טופולוגיים שומרת על התכונות:

א. תכונת מניה שנייה. ב. קומפקטיות מקומית.

תנו דוגמה של סדרת מרחבים טופולוגיים X_n כך שהמכפלה

$\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ היא לא קומפקטית מקומית.

(מרחב טופולוגי נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית)

3. א. הוכיחו את משפט Heine-Borel.

ב. במרחב הילברט l_2 למצוא סדרה יורדת $A_1\supset A_2\supset\cdots$

של קבוצות A_n לא ריקות סגורות וחסומות כך שהחיתוך $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ הוא ריק.

האם קיימת סדרה כזאת עם תכונה נוספת ש A_n מסוימת היא חסומה כליל ?

4. נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל. הוכיחו או הפריכו:

א. אם X קשיר אז גם Y.

ב. אם X בעל תכונת מנייה ראשונה אז גם Y.

5. א. נניח X מרחב מטריזבילי קומפקטי. הוכיחו שהעוצמה של הקבוצה X היא לכל היותר העוצמה $\aleph$ של קבוצת ממשיים.

ב. תנו דוגמה של מרחב קומפקטי ו T_2 שהוא לא מטריזבילי.

שאלת בונוס (5 נקודות): תנו דוגמה של מרחב מטרי X עם 4 אברים כך שמתקיימים 2 תנאים:

א. קיים שיכון איזומטרי $X\to(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$, $\|(\mathrm{x},\mathrm{y})\|_1:=|x|+|y|$.

ב. לא קיים שיכון איזומטרי $X\to\mathbb{R}^n$ למרחב אוקלידי.

בהצלחה !