2 במרץ 2022

לינארית

1. מספרים מרוכבים: מסומנים ב $\mathbb{C}$ והם מספרים מהצורה $a+bi$ עבור a,b ממשיים. ו i מקיים $i^2=-1$. יש חיבור מרוכבים וכפל מרוכבים בצורה שאנחנו מצפים שתהיה. למשל

$$(2-3i)+(-2+5i)=0+2i=2i$$

$$\begin{aligned}(2-3i)\cdot(-2+5i)&=-4+10i+6i-15i^2\\&=-4+10i+6i-15(-1)\\&=11+16i\end{aligned}$$

2. (חורף 2022) נתונים שני מספרים מרוכים

$$\begin{aligned}z_1&=\left(2a^2+5a+4\right)+\left(2a^2+3a+2\right)i\\z_2&=\left(a^2+8a+8\right)+\left(2-a^2+2a\right)i\end{aligned}$$

כאשר a ממשי.

(א) מצאו את הערך של a עבורו z_1,z_2 צמודים זה לזה.
תזכורת/הגדרה: עבור מספר מרוכב $a+bi$ מגדירים את הצמוד שלו להיות

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

למשל

$$\overline{2+3i}=2-3i$$
$$\overline{2-3i}=2+3i$$

פתרון: לפי הגדרת מספרים צמודים, צריך להתקיים

$$\begin{aligned}2a^2+5a+4&=a^2+8a+8\\2a^2+3a+2&=-\left(2-a^2+2a\right)\end{aligned}$$

נעביר אגפים לקבל

$$\begin{aligned}a^2-3a-4&=0\\a^2+5a+4&=0\end{aligned}$$

הפתרונות למשוואה הראשונה הם

$$\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=4,-1$$

הפתרונות למשוואה השניה הם

$$\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}=-1,-4$$

קיבלנו שיש רק a יחיד שפותר את שתי המשוואות שהוא $a=-1$. ובמקרה זה נקבל

$$z_1=\left(2\left(-1\right)^2+5\left(-1\right)+4\right)+\left(2\left(-1\right)^2+3\left(-1\right)+2\right)i=1+1i=1+i$$
$$z_2=\left(\left(-1\right)^2-8+8\right)+\left(2-\left(-1\right)^2-2\right)i=1-i$$

עבור ערך זה: נגדיר

$$w_1=\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$$
$$w_2=\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$$

כאשר n מספר טבעי.

(ב) הוכח שלכל n טבעי: המספר w_1 ממשי ו w_2 מדומה טהור.
הגדרה: מספר מרוכב יקרא ממשי אם החלק המרוכב שלו שווה אפס. למשל $2+0i$ הוא ממשי. מספר מרוכב יקרא מדומה טהור אם החלק הממשי שלו שווה אפס. למשל $0-2i$ הוא מדומה טהור.
פתרון: נחשב

$$w_1=\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}=\left(\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^4\right)^n$$

נעשה חישוב עזר:

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^4=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2=\left(\frac{2i}{2}\right)^2=i^2=-1$$

ולכן

$$w_1=(-1)^n$$

ואכן ממשי. באופן דומה:

$$w_2=\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}=\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n}\cdot\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^4\right)^n\cdot\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

שוב, חישוב עזר,

$$\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^4=\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2=\left(\frac{-2i}{2}\right)^2=\left(-i\right)^2=\left(-1\right)^2i^2=-1$$

ולכן

$$w_2=\left(\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^4\right)^n\cdot\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^2=(-1)^n(-i)=(-1)^n(-1)\,i=(-1)^{n+1}\,i$$

אכן מדומה טהור.

(ג) תזכורת/הגדרה: כולם מכירים את הערך המוחלט הממשי

$$|-2|=2=|2|$$

אפשר להסתכל על זה כמרחק המספר מנקודת האפס.
בהכללה, מגדירים את הערך המוחלט של מספר מרוכב להיות

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

ואם נעלה בריבוע נקבל

$$|a+bi|^2=a^2+b^2$$

נתונה המשוואה $|z-p|=m$ עבור p,m פרמטרים ממשיים ו z (משתנה) מרוכב. מה הערכים של p,m עבורם המשוואה מתארת מעגל במישור גאוס ש w_1,w_2 נמצאים עליו (לכל n).

פתרון: כיוון ש $|z-p|\geq 0$ כי זה ערך מוחלט של מספר. אז $m\geq 0$ ולכן אפשר לעלות בריבוע לקבל

$$|z-p|^2=m^2$$

(שמותר לעשות זאת, כי שני הצדדיים אי-שליליים). נסמן $z=x+yi$ (עבור x,y ממשיים) ונכתוב את המשוואה מחדש:

$$m^2=|z-p|^2=|(x+yi)-p|^2=|(x-p)+yi|^2=(x-p)^2+y^2$$

קיבלנו

$$(x-p)^2+y^2=m^2$$

זהו מעגל עם מרכז $(p,0)$ורדיוס m. אנחנו רוצים שבמעגל זה יהיו הנקודות $(\pm1,0)$ (הערכים האפשריים ל $w_1=\pm1$) ו $(0,\pm1)$ (הערכים האפשריים ל $w_2=\pm i$) ולכן זהו מעגל "היחידה" שמרכזו ב $(0,0)$ ורדיוסו 1. כלומר $p=0,m=1$.

אפשר גם לעשות את זה יותר "קשיח" ולהציב את הנקודות $(\pm1,0),(0,\pm1)$ ומצוא את p,m:

$$(1-p)^2+0^2=m^2$$

$$(-1-p)^2+0^2=m^2$$

$$(-p)^2+(\pm1)^2=m^2$$

משני המשוואות הראשונות נקבל

$$(1-p)^2=(-1-p)^2=\left(=(1+p)^2\right)$$

ואז

$$1-p=\pm(1+p)$$

עבור $1-p=1+p$ נקבל $p=0$ ועבור $1-p=-1-p$ נקבל $2=0$ שלא אפשרי. לכן $p=0$ ואז נחזור למשוואה השלישית

$$0+1=m^2$$

ולכן $m=\pm1$ אבל $m\geq 0$ ולכן $m=1$.

חדוא

1. (חורף 2022) נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}+m}{4}$$

כאשר m ממשי. ידוע ש $y=-1$ הוא אסימפטוטה של $f(x)$.
הרחבה על אסימפטוטות:
אסימפטוטה אנכית = זה ישר $x=a$ שמימין/שמאל של a הפונקציה שואפת כלומר

$$\lim_{x\to a^{+/-}} f(x)=\pm\infty$$

אסימפטוטה אופקית = ישר $y=b$ שעבורו

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$$

והסוג הנוסף אסימפטוטה משופעת = ישר $y=ax+b$ שעבורו

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

.

(א)

i. מצאו את m.
פתרון: נתון ש

$$y=-1$$

אסימפטוטה (אופקית) של $f(x)$. כלומר

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$$

או

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$$

נחשב את שני הגבולות ונראה מה נקבל.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-3e^{x}+m}{4}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}\left(e^{x}-3\right)+m}{4}=\left\{\frac{\infty\cdot\infty+m}{4}\right\}=\infty$$

בצד הזה לא יהיה אסימפטוטה אופקית. נחשב את הגבול השני:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-3e^{x}+m}{4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}\left(e^{x}-3\right)+m}{4}=\left\{\frac{0\cdot(0-3)+m}{4}\right\}=\frac{m}{4}$$

לכן $y=\frac{m}{4}$ אסימפטוטה אופקית יחידה ומהנתון נקבל ש $\frac{m}{4}=-1$ ולכן $m=-4$.

ii. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}-4}{4}$
פתרון: לכל x .

iii. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

פתרון:

חיתוך עם ציר y: נציב $x=0$ ונקבל $f(0)=\frac{1-3-4}{4}=-\frac{6}{4}=-1.5$ ולכן $(0,-1.5)$ חיתוך עם ציר y.

חיתוך עם ציר x: נפתור $f(x)=0$ באופן שקול $e^{2x}-3e^{x}-4=0$. נסמן $t=e^{x}$ ונקבל את המשוואה

$$t^2-3t-4=0$$

שפתרונותיה היא

$$t=-1,4$$

(אפשר לראות זאת גם מ $t^2-3t-4=(t-4)(t+1)$). קיבלנו $e^x=-1$ שאין לו פתרון (כי $e^x>0$) או $e^x=4$ שהפתרון הוא $\ln(4)$ (נוציא $\ln$ משני האגפים). סה"כ קיבלנו נקודת חיתוך יחידה עם ציר x שהיא $(\ln(4),0)$

iv. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}-3e^{x}-4}{4}$ וקבעו את סוגן (אם ישנן).

פתרון:

נגזור את $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-3e^{x}}{4}=\frac{1}{4}\left(2e^{2x}-3e^{x}\right)$$

ונשווה לאפס ונפתור את המשוואה השקולה $2e^{2x}-3e^{x}=0$. נעביר אגף $2e^{2x}=3e^{x}$ ונחלק ב e^x (שחיובי!) ונקבל

$$2e^{x}=3$$

או $e^x=1.5$ ולכן הפתרון $x=\ln(1.5)$. נגזור שוב

$$f''(x)=\frac{4e^{2x}-3e^{x}}{4}$$

ונציב

$$f''(\ln(1.5))=\frac{4\,(1.5)^2-3\,(1.5)}{4}>0$$

ולכן ב $x=\ln(1.5)$ יש מינימום שהערך שלה הוא

$$f(\ln(1.5))=\frac{(1.5)^2-3\,(1.5)-4}{4}=\frac{2.25-4.5-4}{4}$$

ולכן $\left(\ln(1.5),-\frac{25}{16}\approx-1.57\right)$ נקודות מיני'.

(ב) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

פתרון:

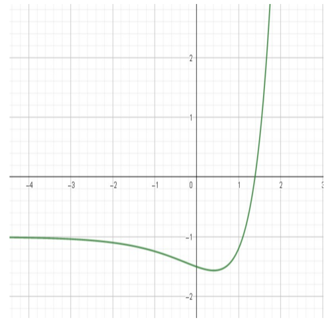
ראינו ש $\left(\ln(1.5),-\frac{25}{16}\approx-1.57\right)$ נקודות מיני'.

חיתוך עם ציר y:$(0,-1.5)$

חיתוך עם ציר x: $(\ln(4),0)$

יש אסימפטוטה אופקית: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$

ראינו גם ש $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ וראינו גם שהיא מוגדרת לכל x (ולכן אין אסימטוטות אנכיות). והסקיצה היא



נתונה

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$$

(ג)

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון:

לכל x עבורו $f(x)\neq 0$ וראינו שיש פתרון יחיד ל $f(x)=0$ שהוא $x=\ln(4)$ ולכן תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא כל $x\neq \ln(4)$.

ii. מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

פתרון:

אסימפטוטות אנכיות: ראינו ש ב $x=\ln(4)$ הפונקציה $f(x)$ מתאפסת ושמה $g(x)$ לא מוגדרת. נראה ש $x=\ln(4)$ אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to\ln(4)^+} g(x)=\lim_{x\to\ln(4)^+}\left[\frac{1}{f(x)}+1\right]=\left\{\frac{1}{0^+}+1\right\}=\infty$$

$$\lim_{x\to\ln(4)^-} g(x)=\lim_{x\to\ln(4)^-}\left[\frac{1}{f(x)}+1\right]=\left\{\frac{1}{0^-}+1\right\}=-\infty$$

אסימפטוטות אופקיות (נסתמך על הגבולות של $f(x)$ ב $x\to\pm\infty$ שחישבנו):

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{f(x)}+1\right]=\left\{\frac{1}{\infty}+1\right\}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{f(x)}+1\right]=\left\{\frac{1}{-1}+1\right\}=0$$

כלומר $y=1$ אסימפטוטה אופקית (מצד ימין) ו $y=0$ אסימפטוטה אופקית (מצד שמאל).

(ד) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון:

אפשר להבין את $g(x)$ לפי הגדרתה ("טרנספורמציה של $f(x)$") ולהגיד ש $\frac{1}{f(x)}$ הופכת תחום ירידה לעליה ולהפך, נקודת מיני' למקס' ולהיפך. חיתוך עם ציר x לאי הגדרה (ופועל יוצא לאסימפטוטה אנכית). ואם יש אסימפטוטה אנכית אזי היא הופכת ל"חור" (ואסימפטוטה אופקית כמו שחישבנו). ו "$+1$" מזיז את כל העסק ב 1.

דרך יותר "קשיחה" (ובבגרות לא צריך לעשות אותה, ככה טוענים) היא כזאת:

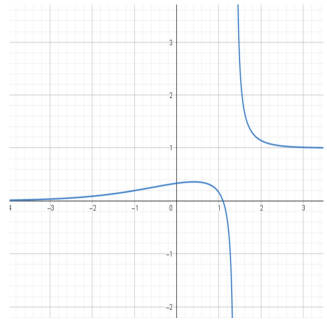
נתחיל עם לגזור:

$$g'(x)=\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

ולכן $g'(x)=0$ אם ורק אם $f'(x)=0$. וכיוון ש $[f(x)]^2>0$ (לכל x בה $f(x)\neq 0$) נקבל ש $f'(x)>0$ גורר $g'(x)<0$ (ולהיפך).

צריך גם למצוא חיתך עם הצירים (עם ציר y זה פשוט להציב 0, עם ציר x זה למצוא נקודה/נקודות בהם $f(x)=-1$ כי $g(x)=\frac{1}{f(x)}+1$).

הנה הסקיצה



ראינו ש עבור $f(x)$:

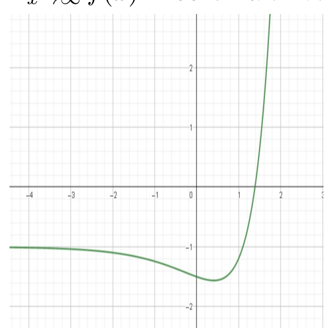
$\left(\ln(1.5), -\frac{25}{16}\approx -1.57\right)$ נקודות מיני'.

חיתוך עם ציר y:$(0,-1.5)$

חיתוך עם ציר x: $(\ln(4),0)$

יש אסימפטוטה אופקית: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

ראינו גם ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ וראינו גם שהיא מוגדרת לכל x (ולכן אין אסימטוטות אנכיות). והסקיצה היא



(ה) מצאו את ערך $0<t<\ln(4)$ עבורו $\int_0^t g(x)$ מקסמאלי.