

ב"ש אנליזה 2 תשעח מועד א

1. חשבו את:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)} dx \quad (\text{א})$$

פתרון: נשתמש בשברים חלקיים: כיוון ש $x^2 + x + 1$ ו x אי פריקים, קיימים A, B, C קבועים כך ש

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

ונעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל

$$x^2+1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$$

כעת- נציב $x = 0$ לקבל $1 = A$ ואז השווינו הוא

$$-x = (Bx+C)x$$

ונחלק ב x (אח"כ לא נציב $x = 0$ אז זה בסדר) לקבל

$$-1 = Bx + C$$

ומכאן ש $C = -1, B = 0$ לפי השוואת מקדמים של חזקות של x . סה"כ קיבלנו

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2+x+1} dx = \ln|x| - \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

נמשיך עם האינטגרל שנשאר לנו בעזרת השלמה לריבוע

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{(x+0.5)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4} \left[\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right)^2 + 1 \right]} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4} [t^2 + 1]} =$$

$$= t = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + C$$

ולכן בסה"כ

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + x + 1)} dx = \ln|x| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan\left(\frac{x + 0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C$$

$$\int e^{2x} e^{(e^x)} dx \quad (\text{ב})$$

פתרון: נשתמש בהצבה :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} e^{(e^x)} dx &= \int (e^x)^2 e^{(e^x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} \\ &= \int t e^t dt \end{aligned}$$

ונמשיך בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int t e^t dt = \left\{ \begin{array}{ll} f = t & f' = 1 \\ g' = e^t & g = e^t \end{array} \right\} = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C$$

ואם נחזיר למונחי x נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\int e^{2x} e^{(e^x)} dx = e^x e^{(e^x)} - e^{(e^x)} + C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = \frac{\cos(x)}{x(x - \frac{\pi}{2})}$.
פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס וב $\frac{\pi}{2}$, נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})} = \left\{ \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} \right\} = \pm \infty$$

כאשר מצד ימין נקבל ∞ ומצד שמאל נקבל $-\infty$. לכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$. נבדוק את הגבול השני

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \frac{\cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})} = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cdot (-1) \right\} = -\frac{2}{\pi}$$

כאשר מסתמכים על הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x)}{1} = -1$$

ולכן אין אסימפטוטה אנכית ב $x = \frac{\pi}{2}$.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x^2(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2(x - \frac{\pi}{2})} \cdot \cos(x) = \{0 \cdot \text{חסומה}\} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x)}{x(x - \frac{\pi}{2})} - 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(x - \frac{\pi}{2})} \cdot \cos(x) = \{0 \cdot \text{חסומה}\} = 0$$

ולכן $y = 0$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x)}{x^2(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2(x - \frac{\pi}{2})} \cdot \cos(x) = \{0 \cdot \text{חסומה}\} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x)}{x(x - \frac{\pi}{2})} - 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(x - \frac{\pi}{2})} \cdot \cos(x) = \{0 \cdot \text{חסומה}\} = 0$$

ולכן $y = 0$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא 0 שהיא ב $x = 1$ ובאף נקודה אחרת, הפונקציה לא מתאפסת. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ שמתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר. הפונקציות $\frac{\sin(x^2)}{x^3}$ ו $\frac{1}{x}$ חיוביות בתחום $(0, 1)$ שהיא $\sin(x)$ חיובית עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x^2)}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-2x}^{x^2} e^{(t^2)} dt}{x}$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-2x}^{x^2} e^{(t^2)} dt = 0$ (כיוון ש $e^{(t^2)}$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-2x}^{x^2} e^{(t^2)} dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{(x^4)} - (-2) e^{((-2x)^2)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{(x^4)} + 2e^{(4x^2)}}{1} = 0 + 2e^0 = 2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{e^{k+n}}}{n}$
פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{e^{k+n}}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(e^{k+n})^{\frac{1}{n}}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(e^{\frac{k}{n} + 1} \right)$$

ועבור $f(x) = e^{x+1}$ שהיא רציפה בקטע $[0, 1]$ נקבל ש

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (e^{\frac{k}{n}+1}) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{x+1} dx = e^{x+1} \Big|_0^1 = e^2 - e$$

.4

(א) קרבו את $\sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$.
פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, נקבל

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ולכן

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

וקיבלנו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k , יש את החסם

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| \leq \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right| = \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

זהו חסם על השגיאה $\left| \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{100} < \frac{1}{120} < \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{5!}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש.

(ב) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n}$.
פתרון: מתקיים ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

ו $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ זהו הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ שהציבו בו $x = -0.5$. כיוון ש $|-0.5| < 1$ הוא נמצא ברדיוס ההתכנסות ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1 - (-0.5))^2} = \frac{1}{1.5^2} = \frac{4}{9}$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{2}{9}$$

5. תהא f פונקציה, כך שלכל $x > 0$ מתקיים כי $f'(x) > 0$ וגם $f''(x) < 0$.

(א) הוכיחו/הפריכו: ל f יש אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$.

פתרון: הפרכה: $f(x) = -e^{-x}$ מקיימת כי $f'(x) = e^{-x} > 0$ ו $f''(x) = -e^{-x} < 0$ שאין לה אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$ (לא לא באף מקום אחר) מכיוון שהיא רציפה בכל \mathbb{R} .

(ב) הוכיחו/הפריכו: קיים x עבורו $f(x) < x$.

פתרון: הפרכה: $f(x) = -e^{-x} + x + 1$ מקיימת כי $f'(x) = e^{-x} + 1 > 0$ ו $f''(x) = -e^{-x} < 0$ ולכל $x \geq 0$ מתקיים ש

$$f(x) = -e^{-x} + x + 1 \geq -1 + x + 1 > x$$

כאשר אי השוויון האדום נובע מכך ש $-e^{-x}$ פונקציה עולה ולכן הערך הקטן ביותר שלה בתחום $[0, \infty)$ הוא $-e^0 = -1$.
בשביל להסתדר גם עם החלק השלילי, נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} + x + 1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

ואז בודאי שגם לכל x שלילי מתקיים $f(x) = 1 \geq x$.