

תורת המשחקים - שיעור 5

אסטרטגיות מקסמין, משפט המינימקס, משחקי סכום אפס

בחירת אסטרטגיה ממצערת נזקים

- ▶ עד כה ניסינו להעריך איזו אסטרטגיה עלינו לבחור במשחק ע"י ניתוח האסטרטגיות שלנו והאסטרטגיות של השחקנים האחרים. לעתים ניתוח זה אינו מועיל:
 - אין ביכולתנו להעריך את הרציונליות של השחקנים האחרים
 - איננו מסוגלים להעריך אילו אסטרטגיות מועדפות על ידי השחקנים האחרים (לדוגמה ע"י שיקולי שליטה)
 - גם אם יש נקודת שיווי משקל נאש היא עלולה להיות "מסוכנת" (נראה בדוגמה הבאה למה הכוונה).

דוגמה לשיווי משקל נאש "מסוכן"

שחקן 2

L

R

שחקן 1

T

2,1

2,-20

M

3,0

-10,1

B

-100,2

3,3

T	2,1	2,-20
M	3,0	-10,1
B	-100,2	3,3

▶ נניח שהתשלומים במשחק הם באלפי ש"ח.

▶ במשחק הזה יש שיווי משקל נאש יחיד (B,R)

אשר מביא תשלום (3,3). התוצאה די

סבירה לשני השחקנים.

▶ אבל אם במקרה (או בכוונה) שחקן 2 יבחר ב-

L ייגרם לשחקן 1 נזק

כבד.

התרחיש הגרוע ביותר – worst case scenario

▶ במקרים כנ"ל ברצוננו להתייחס לתרחיש הגרוע ביותר שיכול לקרות בבחירת אסטרטגיה נתונה שלנו.

▶ דרך שנראית הגיונית לשחק היא לבחור באסטרטגיה שבה התרחיש הגרוע ביותר הוא "הכי פחות גרוע", או "הכי טוב" עבורנו.

▶ נמחיש זאת ע"י דוגמה:

דוגמה

שחקן 2

שחקן 1

	L	C	R
T	2,0	3,3	0,2
B	1,3	0.5, 0	3,1

▶ לכל אסטרטגיה של שחקן 1, נמצא את התרחיש הגרוע ביותר.

▶ נוסיף עמודה של MIN לטבלה.

שחקן 2

		L	C	R	MIN
שחקן 1	T	2,0	3,3	0,2	
	B	1,3	0.5, 0	3,1	

- ▶ אם שחקן 1 בוחר ב T אזי התרחיש הגרוע ביותר עבורו הוא בחירת R ע"י שחקן 2.
- ▶ אם שחקן 1 בוחר ב B אזי התרחיש הגרוע ביותר עבורו הוא בחירת C ע"י שחקן 2.
- ▶ אם כך עדיף על שחקן 1 לבחור באסטרטגיה B כדי "למזער נזקים".

שחקן 2

		L	C	R	MIN
שחקן 1	T	2,0	3,3	0,2	0
	B	1,3	0.5, 0	3,1	0.5
MIN		0	0	1	

- ▶ נבצע חישוב דומה עבור שחקן 2.
- ▶ אם כך על שחקן 2 לבחור באסטרטגיה R אם ברצונו "למזער נזקים".

- קיבלנו שאם שני השחקנים משחקים אסטרטגיות "ממזערות נזקים", הם יבחרו בוקטור האסטרטגיות (B,R) שמביא תשלום 3 לשחקן 1 לעומת תשלום 1 לשחקן 2.
- נמצא נקודות שיווי משקל נאש במשחק הנ"ל:

	L	C	R
T	<u>2,0</u>	<u>3,3</u>	0,2
B	1, <u>3</u>	0.5, 0	<u>3,1</u>

- שיווי משקל נאש היחיד הוא (T,C) אשר שונה מוקטור האסטרטגיות (B,R).
- נשים לב שאם שחקן 2 מאמין ששחקן 1 ייבחר באסטרטגיה B עדיף לו לבחור באסטרטגיה L ולא R.

אסטרטגית מקסמין

- ▶ לאסטרטגיה ממצערת נזקים (B או R בדוגמה הנ"ל) קוראים **אסטרטגית מקסמין**, או **אסטרטגית ביטחון**.
- ▶ אסטרטגיה x_i של שחקן i נקראת **אסטרטגית מקסמין** אם לכל $y_i \in S_i$ מתקיים

$$\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}) \geq \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i})$$

- ▶ הערך $\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$ נקרא **ערך המקסמין** של שחקן i .
- ▶ במקרה שיש אינסוף אסטרטגיות ייתכן שלא קיים \min , ולכן צריך להחליף \min ב \inf .
- ▶ במקרה הנ"ל עדיין ייתכן שלא קיים x_i המקיים את אי-השיויון עבור כל שאר האסטרטגיות. כלומר ייתכנו משחקים בהם אין אסטרטגית מקסמין.

אסטרטגית מקסמין - המשך

▶ בצורה אחרת ניתן להגדיר את התרחיש הגרוע ביותר של שחקן i במקרה שבחר באסטרטגיה x_i להיות

$$\text{WCS}(x_i) = \min_{x_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$$

▶ ואז אסטרטגית מקסמין היא אסטרטגיה x_i המקיימת

$$\begin{aligned} \text{WCS}(x_i) &= \max_{y_i \in \mathcal{S}_i} \text{WCS}(y_i) = \\ &= \max_{y_i \in \mathcal{S}_i} \min_{x_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}} u_i(y_i, x_{-i}) \end{aligned}$$

▶ במקרה של אינסוף אסטרטגיות צריך להחליף \max ב \sup

דוגמא - ערך מקסמין במשחק רציף

▶ נזכר בדוגמא משיעור קודם:

$$u_1(x,y) = 2(x + y + bxy) - x^2 \quad \circ$$

$$u_2(x,y) = 2(x + y + bxy) - y^2 \quad \circ$$

$$0 \leq b \leq \frac{1}{4} \quad \circ$$

$$x,y \in [0,4] \quad \circ$$

▶ כעת נחשב את ערך המקסמין של שחקן 1:

$$\maxmin_1 = \max_{x \in [0,4]} [\min_{y \in [0,4]} (u_1(x,y))] \quad \circ$$

$$u_1(x,y) = (2 + 2bx)y + 2x - x^2 \quad \circ$$

היא פונקציה לינארית ב- y

כיוון ש $x, b \geq 0$ זהו ישר עולה והמינימום מתקבל ב $y = 0$ \circ

$$\min_{y \in [0,4]} (u_1(x,y)) = 2x - x^2 \quad \circ$$

לכן

$$\max_{x \in [0,4]} [2x - x^2] \quad \circ$$

לכן מתקבל כאשר $x = 1$

$$\maxmin_1 = 1 \quad \circ$$

אתנחתה היסטורית

- ▶ תורת המשחקים ורעיון המקסמין בפרט פותחו בשנות ה 20 של המאה ה 20 ע"י פון-נוימן (דמות מפתח בפיתוח המחשב הדיגיטלי, פצצות האטום והמימן ועוד...)
- ▶ רעיון אסטרטגית המקסמין תפס תאוצה ו"פופולריות" בתקופת המלחמה הקרה, שם רצו להתכונן לרע מכל, במחשבה שהאויב ירצה לגרום כמה שיותר נזק.
- ▶ מומחים לחשיבה אסטרטגית ותורת המשחקים ניתחו את המלחמה הקרה כדוגמה לדילמת האסיר, ולכן רצו לבטל את האפשרויות הלא סימטריות במשחק:

		ברה"מ	
		להפציץ	לא
ארה"ב	להפציץ	1,1	5,0
	לא	0,5	4,4

ברה"מ

		ברה"מ	
		להפציץ	לא
ארה"ב	להפציץ	1, 1	1, 1
	לא	1, 1	4, 4

- ▶ לאחר התיקון, (לא, לא) הופך לנקודת שיווי משקל.
- ▶ יש גם חשיבות למי שמפציץ ראשון, כיוון שברגע שמדינה מופצצת כבר אין לה סיבה רציונלית להפציץ חזרה (כפי שניתחנו במשחק האולטימטום בשיעור הראשון).
- ▶ הפתרון למחיקת האסטרטגיות היה רעיון MAD של פון-נוימן: Mutual Assured Destruction.

MAD + Doomsday Device

(או מה שקורה כשנותנים למתמטיקאים לנהל את העולם)

- ▶ MAD = שני הצדדים מבטיחים מצב בו במקרה שצד אחד מפציץ הצד השני מפציץ חזרה באופן אוטומטי, וכך נמנעים צירופי האסטרטגיה הלא רצויים.
- ▶ ב 1952 הרמן קהן (מתמטיקאי שעבד עם פון-נוימן) הציע בתור בדיחה את מכונת יום-הדין (doomsday machine), שתהיה אוטומטית (ממוחשבת) לגמרי ותגרום להשמדת כל החיים על כדור הארץ במקרה של התקפה סובייטית (אף אחד בפורום האסטרטגי לא צחק מהבדיחה).

▶ *Dr. Strangelove or: How I learned to stop worrying and love the bomb*

תכונות של אסטרטגיות מקסמין

▶ **משפט:** אם לשחקן יש אסטרטגיה שולטת (חלש/חזק) אזי אסטרטגיה זו היא אסטרטגית מקסמין שלו.

הוכחה: תהי x_i אסטרטגיה שולטת. אזי מתקיים לכל אסטרטגיה $y_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $x_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i})$$

בפרט מתקיים לכל $y_i \in S_i$

$$\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}) \geq \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i})$$

ולכן מתקיימת הגדרת מקסמין עבור x_i . מש"ל.

▶ **מסקנה:** וקטור המורכב מאסטרטגיות שולטות הוא שיווי משקל נאש וגם וקטור של אסטרטגיות מקסמין.

▶ **מסקנה:** אם קיים וקטור של אסטרטגיות שולטות חזק אזי יש שיווי משקל נאש יחיד, וקיים וקטור אסטרטגיות מקסמין יחיד.

שיווי משקל נאש לעומת אסט' מקסמין

▶ **משפט:** התשלום של שחקן בוקטור אסטרטגיות המהווה שיווי משקל נאש, גדול או שווה לערך המקסמין של אותו השחקן.

▶ **הוכחה:** נניח ש (x_i^*, x_{-i}^*) הוא שיווי משקל נאש. אזי x_i^* היא התגובה המיטבית לצירוף x_{-i}^* .

▶ נניח בשלילה שהתשלום בנקודת שיווי המשקל נמוך מערך המקסמין: $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) < \max_{x_i} \min_{x_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$

▶ לכן עבור אסטרטגית המקסמין $y_i \in S_i$ מתקיים

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) < \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i}) \leq u_i(y_i, x_{-i}^*)$$

▶ לכן עדיף לשחקן i להחליף לאסטרטגיה y_i בסתירה לכך ש (x_i^*, x_{-i}^*) הינו שיווי משקל נאש.

שיווי משקל נאש לעומת אסט' מקסמין

▶ שאלה: האם ייתכן שהתשלום של שחקן בוקטור אסטרטגיות שיווי משקל נאש יהיה נמוך יותר מהתשלום בוקטור אסטרטגיות מקסמין של כל השחקנים?

שיווי משקל נאש לעומת אסט' מקסמין

- שאלה: האם ייתכן שהתשלום של שחקן בוקטור אסטרטגיות שיווי משקל נאש יהיה נמוך יותר מהתשלום בוקטור אסטרטגיות מקסמין של כל השחקנים?
תשובה: כן.

	L	C	R
T	<u>1,0</u>	<u>3,3</u>	-10,2
B	0, <u>5</u>	0.5, 1	<u>4,4</u>

מחיקת אסטרטגיות נשלטות ומקסמין

▶ משפט: מחיקת אסטרטגיה נשלטת של שחקן i אינה משנה את ערך המקסמין שלו.

▶ הוכחה:

▶ ערך המקסמין של שחקן i הוא $m_i = \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$

▶ לאחר מחיקת אסטרטגיה נשלטת $y_i \in S_i$ ערך המקסמין החדש הוא

$$m_i = \max_{x_i \in S_i, x_i \neq y_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$$

▶ כיוון ש $y_i \in S_i$ אסטרטגיה נשלטת אזי לפי הגדרה קיימת אסטרטגיה $z_i \in S_i$ המקיימת לכל $x_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(y_i, x_{-i}) \leq u_i(z_i, x_{-i})$$

▶ לכן

$$\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i}) \leq \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(z_i, x_{-i}) \leq \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}) = m_i$$


מחיקת אסטרטגיות נשלטות ומקסמין

▶ משפט: מחיקת אסטרטגיה נשלטת של שחקן i אינה משנה את ערך המקסמין שלו.

▶ הוכחה:

▶ ערך המקסמין של שחקן i הוא $m_i = \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$

התרחיש הגרוע ביותר של z_i טוב לפחות כמו זה של y_i


$$\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i}) \leq \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(z_i, x_{-i}) \leq \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}) = m_i$$

▶ אם כך הסרת אסט' y_i אינה פוגעת בערך המקסמין

▶ מש"ל

מחיקת אסטרטגיות נשלטות ומקסמין

- ▶ אם מוחקים אסטרטגיה נשלטת של שחקן j אזי ערך המקסמין של שחקן i עלול להשתנות. לדוגמה:

	L	R
T	1,1	0,3
B	2,4	1,1

- ▶ ערך המקסמין של שחקן 2 הוא $m_2 = 1$.
- ▶ T נשלטת ע"י B, ולאחר מחיקתה מתקיים $m_2 = 4$.
- ▶ **משפט:** מחיקת אסטרטגיה של שחקן j לעולם אינה מקטינה את ערך המקסמין של שחקן i .
- ▶ **הוכחה:** תרגיל בית.

משחקי סכום אפס

- ▶ משחק שני שחקנים נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל וקטור אסטרטגיות (x_1, x_2) מתקיים

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = 0$$

- ▶ משחק כזה מתאר מצב בו האינטרסים של השחקנים מנוגדים לחלוטין.

- ▶ הפסד של שחקן אחד הוא הרווח של השחקן השני.

- ▶ ניתן לתאר משחקים בהם יש רק שתי תוצאות {הפסד, ניצחון} כמשחק סכום אפס.

- ▶ גם משחקים בהם יש שלוש תוצאות של {הפסד, תיקו, ניצחון} ניתן לתאר כמשחק סכום אפס.

- ▶ משחקי הימורים בהם השחקן המנצח לוקח את כל הקופה הם גם משחקי סכום אפס (לדוג' פוקר בשני שחקנים).

משחקי סכום אפס - כתיב מקוצר

‣ במקום לרשום

	L	R
T	1,-1	0,0
B	2,-2	-1,1

‣ נרשום רק את התשלום של שחקן 1

	L	R
T	1	0
B	2	-1

משחקי סכום אפס - כתיב מקוצר - המשך

▶ במקום להשתמש בשתי פונקציות תשלום נשתמש רק בפונקצית תשלום יחידה $u(x_1, x_2) := u_1(x_1, x_2)$ ואז כמובן מתקיים $u_2(x_1, x_2) = -u(x_1, x_2)$.

▶ לפי הגדרת u שחקן 1 מנסה **למקסם** את ערכה, ואילו שחקן 2 מנסה **למצער** את ערכה.

דוגמה – זוג או פרט

- ▶ כל אחד משני שחקנים בוחר מספר (H – זוג או T – פרט).
- ▶ אם התוצאות זהות HH או TT אזי שחקן 1 מנצח ושחקן 2 מעביר לו שקל.
- ▶ אם התוצאות שונות HT או TH אזי שחקן 2 מנצח ושחקן 1 מעביר לו שקל.

		שחקן 2	
		H	T
שחקן 1	H	1	-1
	T	-1	1

ערכי מינמקס ומקסמין במשחק סכום אפס

▶ נחשב את ערך המקסמין של שחקן 2:

$$m_2 = \max_{x_2 \in S_2} \min_{x_1 \in S_1} -u(x_1, x_2) = -\min_{x_2 \in S_2} \max_{x_1 \in S_1} u(x_1, x_2)$$

(השיויון הימני נכון בגלל שהוצאת מינוס הופכת max ל min ולהפך).

▶ הערך

$$\bar{v} = \min_{x_2 \in S_2} \max_{x_1 \in S_1} u(x_1, x_2)$$

נקרא ערך המינמקס של המשחק.

בהתאמה נקרא ל

$$\underline{v} = \max_{x_1 \in S_1} \min_{x_2 \in S_2} u(x_1, x_2)$$

ערך המקסמין של המשחק.

פירוש של ערכי המינמקס והמקסמין

▶ ערך המקסמין \underline{v} של המשחק הוא ערך המקסמין של שחקן 1, ולכן הוא קובע את הסכום המינימלי ששחקן 1 יכול להבטיח לעצמו.

▶ ערך המינמקס של המשחק הוא מינוס ערך המקסמין של שחקן 2. כלומר שחקן 2 יכול להבטיח לעצמו סכום מינימלי של $-\bar{v}$.

▶ זה שקול לכך ששחקן 2 יכול להבטיח ששחקן 1 יקבל לכל היותר \bar{v} .

דוגמאות לחישוב המקסמין/מינימקס

▶ משחק זוג או פרט:

שחקן 2

		H	T	MIN
שחקן 1	H	1	-1	-1
	T	-1	1	-1
MAX		1	1	$\underline{v} = -1 \quad \bar{v} = 1$

▶ במשחק זה אנו רואים שייתכן ו- $\underline{v} \neq \bar{v}$

דוגמאות לחישוב המקסמין/מינימקס - המשך

שחקן 2

		L	C	R	MIN
שחקן 1	T	3	-5	-2	-5
	M	1	4	1	1
	B	6	-3	-5	-5
MAX		6	4	1	$\underline{v} = 1 \quad \bar{v} = 1$

זוג אסטרטגיות מקסמין הוא (M,R) והוא גם נקודת שיווי משקל נאש.

פירוש של ערכי המינמקס והמקסמין – המשך

▶ אם שני השחקנים ישחקו באסטרטגיות מקסמין שלהם, נקבל שהתשלום של שחקן 1 מוגבל ע"י

$$\underline{v} \leq u(x_1, x_2) \leq \bar{v}$$

▶ בפרט קיבלנו ש $\underline{v} \leq \bar{v}$.

▶ אם מתקיים $\underline{v} = \bar{v}$ נאמר ש- **למשחק יש ערך** ו $v := \underline{v} = \bar{v}$ נקרא ה- **ערך של המשחק**.