דוגמא א:

תהי $D = \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = \aleph\}$

ראשית, ברור ש $D \subseteq P(\mathbb{R})$ ולכן $|D| \le |P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$

נבנה פונקציה מ

$$h : \{0,1\}^{\mathbb{R}} \to D \times \{0,1\}$$

ע"י

$$h(f) = \begin{cases} (f^{-1}[\{1\}], 1) & |f^{-1}[\{1\}]| = \aleph \\ (f^{-1}[\{0\}], 0) & \text{אחרת} \end{cases}$$

מדוע היא מוגדרת היטב?

הרי

$$f^{-1}[\{1\}] \cup f^{-1}[\{0\}] = \mathbb{R}$$

אז אם העוצמה של $f^{-1}[\{1\}]$ קטנה ממש מאלף, העוצמה של $f^{-1}[\{0\}]$ חייבת להיות אלף לפי חוק סכום עוצמות. (במבחן לפרט יותר).

וקל להוכיח שהפונקציה הזו חח"ע

$$|D \times \{0,1\}| = 2 \cdot |D| = |D|$$

כי D אינסופית (צריך לפרט, אבל זה כבר ממש קל).

הראנו סה"כ

$$2^{\aleph} \le |D| \le 2^{\aleph}$$

קוובאנגה (ק.ש.ב)

ולכן

$$|D| = 2^{\aleph}$$

הערה לא הכי קשורה:

אם רוצים לומר למשל $2 \cdot 2 \cdots 2$ אלף אפס פעמים זו בעצם סדרה בינארית.

באופן מדוייק מסכלים על $2^{\aleph_0} = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = \left|\{3,30\}^{\text{זוגיים}}\right|$

הערה 2:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

דוגמא 2:

מצאו את עוצמת כל החלוקות של $\mathbb{R}$ (זה בעצם שווה לעוצמת כל יחסי השקילות על הממשיים)

חלוקות הן קבוצות של קבוצות

ולכן אוסף החלוקות, נקרא לו D מוכל ב:

$$D \subseteq P\big(P(\mathbb{R})\big)$$

$$|D| \leq 2^{\left(2^{\aleph}\right)}$$

נבנה פונקציה

$$h: D \to P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

כלומר h מקבל חלוקה – שהיא קבוצה של קבוצות זרות לא ריקות שמכסות את כל הממשיים.

ופולטת יחס מהממשיים לעצמם.

נגדיר שh שולחת כל חלוקה ליחס השקילות שהיא משרה, כמובן שזה חח"ע ולכן

$$|D| \leq 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$$

בכיוון ההפוך נביט ב

$$g: P(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\} \to D \times \{0,1\}$$

$$g(X) = \begin{cases} (\{X, \mathbb{R} \setminus X\}, 0) & 0 \in X \\ (\{X, \mathbb{R} \setminus X\}, 1) & 0 \notin X \end{cases}$$

לא מסובך (אבל נחוץ) להוכיח ש g חח"ע

חיסור מספר סופי של איברים לא השפיע על העוצמה האינסופית, וכך גם הכפל ב2.

וסה"כ קוובאנגה!

$$|D| = 2^{\aleph}$$

דוגמא 3:

שאלה 2

תהי A קבוצת כל הפונקציות מ $\{1,2,3\}$ ל $\{1,2,3\}$. נגדיר על A יחסים R ו S כך:

לכל $f,g\in A$, $(f,g)\in R$ אם $f^{-1}\left[\{1,2\}\right]=g^{-1}\left[\{1,2\}\right]$

ו $(f,g)\in S$ אם $f(i)\leq g(i)$ לכל $1\leq i\leq 3$.

א. הוכיחו כי R הוא יחס שקילות ומצאו את כל איברי מחלקת השקילות של הפונקציה f המקיימת $f(1)=1, f(2)=f(3)=2$.

ב. מצאו את מספר מחלקות השקילות של R ומצאו מחלקה עם איבר אחד.

ג. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי וכי קיים ב A איבר קטן ביותר m.

ד. מצאו את כל האיבריים המינימליים בקבוצה $A\setminus\{m\}$, לפי יחס הסדר S.

על מנת להתחיל לנסות לחשוב על אולי להבין משהו, ניקח שתי פונקציות אקראיות ונבדוק האם היחס מתקיים בינהן

$$h(1)=1, h(2)=3, h(3)=1$$

$$g(1)=1, g(2)=3, g(3)=2$$

אזי

$$hRg$$

אם ורק אם

$$h^{-1}[\{1,2\}]=g^{-1}[\{1,2\}]$$

אכן

$$\{1,3\}=\{1,3\}$$

קל לראות שזה סימטרי

אבל למשל עבור

$$h(1)=1, h(2)=2, h(3)=1$$

$$g(1)=1, g(2)=3, g(3)=2$$

$$\{1,2,3\}\neq\{1,3\}$$

ולכן $(h,g)\notin R$

א. נוכיח שאכן R הינו יחס שקילות.

<u>רפלקסיבי:</u>

תהי f צ"ל fRf

כלומר צ"ל כי $f^{-1}[\{1,2\}]=f^{-1}[\{1,2\}]$

כאילו דא.

<u>סימטריות:</u>

תהיינה f,g כך שfRg צ"ל gRf.

נתון ש $f^{-1}[\{1,2\}]=g^{-1}[\{1,2\}]$

צ"ל ש$g^{-1}[\{1,2\}]=f^{-1}[\{1,2\}]$

Yeet

טרנזיטיוביות:
תהיינה f, g, h כך ש fRg, gRh צ"ל שfRh
נתון $f^{-1}[\{1,2\}] = g^{-1}[\{1,2\}]$
נתון $g^{-1}[\{1,2\}] = h^{-1}[\{1,2\}]$
צ"ל $f^{-1}[\{1,2\}] = h^{-1}[\{1,2\}]$
קלללל...

כעת נסמן
$$f(1) = 1, f(2) = f(3) = 2$$
צ"ל את מחלקת השקילות שלה
$$[f]_R = \{\text{קבוצת כל הפונקציות שמתייחסות ל } f\} = \{g|fRg\} = \{g|g^{-1}[\{1,2\}] = f^{-1}[\{1,2\}]\} =$$
$$= \{g|g^{-1}[\{1,2\}] = \{1,2,3\}\} = \{1,2\}^{\{1,2,3\}}$$

ב. ראשית – מחלקה עם איבר אחד:
$$f(1) = f(2) = f(3) = 3$$
$$f^{-1}[\{1,2\}] = \emptyset$$
וזו הפונקציה היחידה שעושה את זה, כיוון שהיא חייבת לשלוח את כל האיברים לאיבר שאינו 1 או 2, ורק 3 הוא כזה ולכן
$$[f]_R = \{f\}$$
קל להוכיח (צריך להוכיח במבחן) שיש התאמה חח"ע ועל בין $P(\{1,2,3\})$ למחלקות השקילות של היחס
$$h: P(\{1,2,3\}) \to A/R$$
$$h(X) = [f_X]_R$$
כאשר
$$f_X(a) = \begin{cases} 1 & a \in X \\ 3 & a \notin X \end{cases}$$

שימו לב:
$$f_X^{-1}[\{1,2\}] = X$$

לכן
$$|A/R| = |P(\{1,2,3\})| = 2^3 = 8$$

ג. תוכיחו לבד שמדובר ביחס סדר חלקי, זה לא אמור להיות סוף העולם.
$$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 1$$
$$g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 2$$
האם hSg?
אכן, לכל a מתקיים כי $h(a) \leq g(a)$

מי האיבר הקטן ביותר?
הפונקציה הקבועה 1, נסמנה f.
צ"ל שהיא קטנה או שווה ביחס S לכל הפונקציות האחרות.

תהי g צ"ל fSg
כלומר צ"ל שלכל a מתקיים $f(a) \leq g(a)$

יהי a, אכן
$$f(a) = 1 \leq g(a)$$

ד. נסמן ב m את הפונקציה הקבועה 1 כמו בסימון השאלה

ניחוש מושכל: שלושת הפונקציות ששולחות שני איברים ל1 ואת השלישי ל2.

מה צ"ל על מנת שזה יהיה בטוח נכון?

ראשית, צריך להוכיח שאכן שלושת הפונקציות הללו מינימליות (נוכיח עבור אחת, ההוכחות האחרות דומות)

שנית, כל פונקציה אחרת <u>אינה</u> מינימלית.

נסמן

$$f_1(1) = 2, f_1(2) = f_1(3) = 1$$

נוכיח ש f_1 מינימלית:

תהי $g \in A \setminus \{m\}$ כך ש gSf_1

צ"ל $g = f_1$

לכל a מתקיים כי $g(a) \le f_1(a)$

$$g(1) \le 2$$
$$1 \le g(2), g(3) \le 1$$

לכן $g(1) = 1$ או $g(1) = 2$ **אבל** אם $g(1) = 1$ אז $g = m$ בסתירה לכך ש $g \in A \setminus \{m\}$ ולכן $g = f_1$

כעת תהי $g \in A \setminus \{m\}$ כך ש$g \neq f_a$, צ"ל g אינה מינימלית.

הפונקציה $g \neq m$ ולכן לא שולחת את כל האיברים ל1

כמו כן, כיוון ש$g \neq f_a$ קיימים לפחות שני איברים שלא נשלחים ל1 או ששני איברים נשלחים ל1 והשלישי ל3.

נטפל בשני המקרים, ונראה שהפונקציות הללו אינן מינימליות.

$$g(a_1) > 1, g(a_2) > 1$$

אזי

$$f(a_1) = 1, f(a_2) = 2, f(a_3) = 1$$

ברור ש fSg וגם $f \neq g$ ולכן אכן g אינה מינימלית.

במקרה השני

$$g(a_1) = g(a_2) = 1, g(a_3) = 3$$

ברור ש$f_{a_3}Sg$ וכמו כן $f_{a_3} \neq g$ ולכן g אינה מינימלית.

דוגמא 4:

<u>שאלה 2 (20 נקודות)</u>

תהי $A=P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ קבוצת הפונקציות מ $\mathbb{N}$ ל $P(\mathbb{N})$.

נגדיר את R יחס על A על ידי $fRg \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: f(n)\subseteq g(n)$.

א. (5 נק') הוכיחו כי R הינו יחס סדר חלקי.
ב. (2 נק') האם R יחס מלא? הוכיחו.
ג. (3 נק') האם יש איבר גדול ביותר ב A?
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הגדול ביותר.
אם לא, הוכיחו שאין איבר גדול ביותר.
ד. (5 נק') תהיי $X=\{f\in A | \forall n\in\mathbb{N}: n\in f(n)\}$.
האם יש איבר קטן ביותר ב X? (לפי היחס R שהוגדר קודם)
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הקטן ביותר.
אם לא, הוכיחו שאין איבר קטן ביותר.
ה. (5 נק') תהיי $D=\{f\in A | \forall n\in\mathbb{N}: (f(n)\subseteq f(n+1))\wedge(f(n)\neq f(n+1))\}$.
האם יש איבר קטן ביותר ב D? (לפי היחס R שהוגדר קודם)
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הקטן ביותר.
אם לא, הוכיחו שאין איבר קטן ביותר.

הקדמה: דוגמאות לאיברים מA

$$f(n)=\{n\}$$

$$g(n)=\emptyset$$

ברור שgRf כי הקבוצה הריקה מוכלת בהכל.

יותר מזה, די ברור שg היא האיבר הקטן ביותר.

נוכיח שf הוא האיבר הקטן ביותר בX

ראשית נוכיח ש$f\in X$ אכן ברור שלכל n מתקיים כי $n\in f(n)=\{n\}$

תהי $g\in X$ צ"ל fRg

יהי n צ"ל $f(n)\subseteq g(n)$

כלומר צ"ל

$$\{n\}\subseteq g(n)$$

כלומר צ"ל

$$n\in g(n)$$

וזה נכון כי $g\in X$

ה.

נבנה שני איברים מינימליים וכך נוכיח שאין איבר קטן ביותר

$$f(1) = \emptyset, f(2) = \{1\}, \dots, f(n) = \{1,2, \dots, n-1\}$$

$$g(1) = \emptyset, g(2) = \{2\}, \dots, g(n) = \{2,3, \dots, n\}$$

ראשית, קל להוכיח באינדוקציה כי $f, g \in D$

כלומר לכל *n* מתקיים כי

$$f(n) \subsetneq f(n+1)$$

וכנ"ל לגבי g

הוכחת מינמליות

תהי *h* כך hRf צ"ל $h = f$

שוב צ"ל באינדוקציה.

$$h(1) \subseteq f(1) = \emptyset$$

ולכן $h(1) = \emptyset$

יהיה *n* עבורו הטענה נכונה, נוכיח עבור *n+1*

$$h(n) = f(n)$$

$$|h(n)| = |f(n)| = n-1$$

נתון

$$h(n) \subsetneq h(n+1) \subseteq f(n+1)$$

כיוון ש

$$|h(n)| = n-1$$

$$|f(n+1)| = n$$

ביחד נקבל כי

$$|h(n+1)| = n$$

כיוון שיש לנו קבוצות **<u>סופיות</u>** באותו גודל שהאחת מוכלת בשנייה, הן שוות.

דוגמא 5:

שאלה 3

נגדיר $S=\{R|\ R$ הוא יחס שקילות על $\mathbb{N}\}$.

א. (5 נק') הוכיחו כי $|S|\le$ א.

הדרכה: אין צורך לבנות פונקציה.

תהיי $A=\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ ותהיי J קבוצת כל החלוקות D של $\mathbb{N}$ כך ש $|D|=2$.

ב. (10 נק') מצאו פונקציה חח"ע $f:P(A)\to J$, הוכיחו.

ג. (8 נק') הוכיחו כי $|J|=$ א.

א.

$$S\subseteq P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

וכמובן

$$|P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=א$$

ב.

$$f(X)=\{X\cup\{1\},\mathbb{N}\setminus(X\cup\{1\})\}$$

ראשית על מנת להוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב, צ"ל שצד ימין הוא חלוקה בגודל 2.

- על מנת להראות שהחלוקה בגודל 2, צ"ל ששתי הקבוצות שונות, אכן 1 נמצא באחד ולא בשנייה.
- ברור שאיחוד הקבוצות הוא כל הטבעיים
- ברור שהחיתוך ריק (קבוצה והמשלים שלה)
- ברור שאף קבוצה אינה ריקה, כי 1 נמצא בשמאלית ו2 נמצא בימנית

כעת נוכיח שהפונקציה חח"ע:

תהיינה X_1,X_2 כך ש

$$f(X_1)=f(X_2)$$

כלומר

$$\{X_1\cup\{1\},\mathbb{N}\setminus(X_1\cup\{1\})\}=\{X_2\cup\{1\},\mathbb{N}\setminus(X_2\cup\{1\})\}$$

כיוון ששתי החלוקות שוות, אנחנו יודעים שיש בהם אותו זוג קבוצות, אבל לכאורה לא יודעים איזה קבוצה שווה לאיזו קבוצה.

אבל אנחנו בעצם כן יודעים יודעים, כי רק באחד נמצא 1 ורק בשנייה נמצא 2 כפי שראינו.

ולכן

$$X_1\cup\{1\}=X_2\cup\{1\}$$

כיוון ש $1\notin A$ נובע ש $1\notin X_i$

סה"כ $X_1=X_2$

ג.

ראשית,

$$|A| = \aleph_0$$

כי שינוי מספר סופי של איברים לא משפיע על עוצמה אינסופית

$$א = 2^{\aleph_0} = |P(A)| \leq |J|$$

כעת J מוכלת בקבוצת כל החלוקות של הטבעיים, ועוצמת כל החלוקות שווה לעוצמת כל יחסי השקילות (הרי יש התאמה חח"ע ועל ביניהם).

ולכן

$$|J| \leq |S| \leq א$$

ולכן אכן $|J| = א$ כי-וובאנגה

על הדרך, למעשה הוכחנו ש $|S| = א$