מתמטיקה מד"ר תשפב מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = 2x + 2xy^2$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 0$.

פתרון: נסדר

$$y' = 2x\left(1 + y^2\right)$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{1+y^2} = 2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\arctan(y) = x^2 + C$$

לכן

$$y = \tan\left(x^2 + C\right).$$

נציב תנאי התחלה

$$0 = y(0) = \tan(0 + C)$$

לכן $C = \arctan(0) = 0$. התשובה הסופית היא

$$y(x) = \tan\left(x^2\right).$$

2. מצאו פתרון למד"ר $x^2 e^{xy} y' = x\sin(2x) - xye^{xy}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(\pi) = 0$.

פתרון: נגדיר $z=xy$ ואז $z'=y+xy'$. נציב במד"ר שלנו $z=xy, y'=\frac{z'-y}{x}=\frac{z'-\frac{z}{x}}{x}=\frac{z'x-z}{x^2}$:

$$x^2e^{xy}y'=x\sin(2x)-xye^{xy}$$

$$x^2e^z\left(\frac{z'x-z}{x^2}\right)=x\sin(2x)-ze^z$$

$$e^zz'x-e^zz=x\sin(2x)-ze^z$$

$$e^zz'=\sin(2x)$$

או בכתיב שקול

$$e^z\mathrm{dz}=\sin(2x)\mathrm{dx}$$

שהינה מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים,

$$e^z=-\frac{\cos(2x)}{2}+c$$

ולכן $z=\ln\left(-\frac{\cos(2x)}{2}+C\right)$. נחזור ל $y=\frac{z}{x}$ לקבל

$$y(x)=\frac{\ln\left(-\frac{\cos(2x)}{2}+C\right)}{x}.$$

נ נציב תנאי התחלה $y(\pi)=0$

$$0=y(\pi)=\frac{\ln\left(-\frac{\cos(2\pi)}{2}+C\right)}{\pi}=\frac{\ln\left(-\frac{1}{2}+C\right)}{\pi}$$

לכן $\ln\left(-\frac{1}{2}+C\right)=0$ ואז $-\frac{1}{2}+C=1$ ומכאן ש $C=\frac{3}{2}$. סה"כ הפתרון

$$y=\frac{\ln\left(-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{2}\right)}{x}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $(1-x)\,y''+xy'-y=0$ המקיים $y(0)=1, y'(0)=2$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1},\qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$\left(1-x\right)y''+xy'-y=y''-xy''+xy'-y=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right)x^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}\left(k+1\right)kx^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=a_2\cdot2\cdot1-a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right)-a_{k+1}\left(k+1\right)k+a_kk-a_k\right]x^k$$

ולכן $2a_2-a_0=0$ ולכל $k\geq1$ מתקיים

$$a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right)-a_{k+1}\left(k+1\right)k+a_kk-a_k=0$$

$$a_{k+2}=\frac{\left(1-k\right)a_k+k\left(k+1\right)a_{k+1}}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$

נוכל לבחור a_0,a_1 כרצוננו ואז:

$$a_2=\frac{a_0}{2}$$

$$a_3=\frac{2a_2}{3!}=\frac{a_0}{3!}$$

$$a_4=\frac{-a_2+3!a_3}{3\cdot4}=\frac{-\frac{a_0}{2}+3!\frac{a_0}{3!}}{3\cdot4}=\frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k = \frac{a_0}{k!}$ לכל $k \geq 2$.

כעת נבחר $a_1 = \frac{a_0}{1!}$ ונקבל כי

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{1}{k!} x^k = a_0 e^x$$

ונבחר $a_0 = 1$ לקבל כי $y_1(x) = e^x$ פתרון למד"ר שלנו. נייצר פתרון נוסף: נבחר $a_0 = 0$ (מה שגורר כי $a_k = 0$ לכל $k \geq 2$) ו $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון $y_2(x) = x$. נוכיח כי y_1, y_2 בת"ל ע"י שנראה שהורונסקיאן שונה מאפס. אכן

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = e^x (1 - x)$$

שונה מאפס בסביבה של 0 (ששמה תנאי ההתחלה). מכאן נסיק שהפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$2 = y'(0) = c_1 + c_2$$

לכן $c_1 = c_2 = 1$ והפתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x + x$.

4. חפץ בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ מחובר לקפיץ עם קבוע קפיץ $k = 1$ על משטח ללא חיכוך, אורך הקפיץ במצב רפוי הוא מטר אחד.

(א) נניח שבזמן $t = 0$ ממקמים את החפץ כך שהקפיץ יהיה באורך מטר וחצי, ומשחררים את החפץ במצב מנוחה. מה יהיה אורך הקפיץ בזמן $t = 0$?

פתרון: נסמן מיקום המסה ביחס לנקודת הריפיון ב y והמיקום ההתחלתי הוא בכיוון החיובי. בפרט $y(0) = \frac{1}{2}$. הכח הפועל על המסה הוא ky בכיוון המנוגד למיקום ולכן הכח הוא $-ky$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-ky = ma = a$$

או $-ky = y''$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). נציב $k = 1$ לפי הנתונים ונקבל

$$y'' + y = 0$$

שהיא מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x) = x^2 + 1$$

והשורשים של הפולינום הם $\pm i$ ולכן

$$\cos(x), \sin(x)$$

בסיס למרחב הפתרונות. לכן

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

הוא פתרון כללי. נשתמש $y(0) = \frac{1}{2}$. מתקיים

$$\frac{1}{2} = y(0) = c_1$$

ולכן $y(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + c_2 \sin(x)$. כיוון שמשחררים את החפץ במצב מנוחה, $y'(0) = 0$.

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + c_2 \cos(x)$$

$$0 = y'(0) = c_2$$

ולכן $y(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$. בזמן $t = 2$ אורך הקפיץ יהיה

$$1 + y(2) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x)$$

שהרי $y(x)$ הוא מיקום החפץ (או אורך הקפיץ) ביחס לנקודת הריפיון שנמצאת ב 1.

(ב) נניח שבזמן $t = 0$ אורך הקפיץ הוא בדיוק מטר אחד, ובזמן $t = \frac{\pi}{2}$ אורך הקפיץ הוא מטר וחצי. מה הייתה מהירות החפץ בזמן $t = 0$ ובאיזה כיוון היא הייתה? (הכיוון בו הקפיץ נמתח, או הכיוון בו הקפיץ מתכווץ.)

פתרון: ראינו בסעיף קודם כי

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

הוא פתרון כללי. נשתמש בנתון של השאלה כי $y(0) = 0$. מתקיים

$$0 = y(0) = c_1$$

ולכן $y(x)=c_2\sin(x)$. נתון עוד כי $y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$ (נסמן את הכיוון החיובי בכיוון שהקפיץ מתוח בזמן $t=\frac{\pi}{2}$). נציב

$$\frac{1}{2}=y(\frac{\pi}{2})=c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2$$

ולכן $y(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ מתאר את מיקום החפץ. נגזור, לקבל את פונקצית המהירות ואז נציב 0 לקבל את המהירות ההתחלתית

$$y'(x)=\frac{1}{2}\cos(x)$$

$$y'(0)=\frac{1}{2}$$

ולכן המהירות ההתחלתית היא $\frac{1}{2}$ בכיוון שהקפיץ נמתח (שהרי $y'(0)>0$).

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, וב I את אופרטור הזהות.

(א) עבור $T=(xD-I)(D-xI)$ מצאו $y_1,y_2\in\ker T$ כך ש y_1,y_2 בת"ל.

פתרון: נתחיל בפתרון שנמצא ב$\ker(D-xI)$. זה שקול למצוא פתרון למד"ר

$$y'-xy=0$$

שבהעברת אגף ורישום שקול $\frac{1}{y}\mathrm{dy}=x\mathrm{dx}$ ולכן $\ln|y|=\frac{x^2}{2}$ פתרון (לקחנו את הקבוע להיות 0). מכאן ש

$$|y|=e^{\frac{x^2}{2}}$$

ונבחר את הפתרון החיובי $y=e^{\frac{x^2}{2}}$. נסמנו $y_1(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$.

כעת נמצא פתרון שנמצא ב$\ker(xD-I)$. זה שקול למצוא פתרון למד"ר

$$xy'-y=0$$

שבהעברת אגף ורישום שקול $\frac{1}{y}\mathrm{dy}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}$ ולכן $\ln|y|=\ln|x|$ פתרון (לקחנו את הקבוע להיות 0). מכאן ש

$$|y|=|x|$$

ונבחר את $y=x$. כעת נמצא פתרון למד"ר $y'-xy=x$.

$$y'=x(1+y)$$

$$\frac{1}{1+y}\mathrm{dy}=x\mathrm{dx}$$

לכן $\ln|1+y|=\frac{x^2}{2}$ (לקחנו את הקבוע להיות 0). נמשיך

$$|1+y|=e^{\frac{x^2}{2}}$$

נבחר פתרון המקיים $1+y>0$ ונקבל $1+y=e^{\frac{x^2}{2}}$ או $y=e^{\frac{x^2}{2}}-1$. נסמנו $y_2(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1$.
טענה: עבור $y_1(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ ו $y_2(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1$ שמצאנו מתקיים $y_1,y_2\in\ker T$ בת"ל. הוכחה:

$$Ty_1=(xD-I)(D-xI)y_1=(xD-I)0=0$$

$$Ty_2=(xD-I)(D-xI)y_2=(xD-I)x=0$$

לכן y_1,y_2 בגרעין של T. נראה שהם בת"ל: נניח

$$c_1y_1+c_2y_2=0$$

ונראה כי $c_1=c_2=0$. אכן, נפעיל את האופרטור $(D-xI)$ על המשוואה ונקבל

$$\begin{aligned}0&=c_1(D-xI)y_1+c_2(D-xI)y_2\\&=c_1\cdot 0+c_2x\end{aligned}$$

ולכן $c_2=0$. נחזור למשוואה $c_1y_1=0$ להסיק כי שגם $c_1=0$ כנדרש.

(ב) מצאו פתרון למד"ר $xy''-\left(x^2+1\right)y'=0$ המקיים $y(1)=0,y'(1)=1$.

פתרון: נשים לב שעבור y מתקיים:

$$Ty=(xD-I)(D-xI)y=(xD-I)(y'-xy)=$$

$$=xD(y'-xy)-(y'-xy)=x(y''-y-xy')-(y'-xy)=$$

$$=xy''-x^2y'-y'=xy''-\left(x^2+1\right)y'$$

ולכן הגרעין של T הוא אוסף הפתרונות למד"ר שלנו $xy''-\left(x^2+1\right)y'=0$.

מצאנו בסעיף קודם כי $y_1(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ ו $y_2(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1$ בסיס למרחב הפתרונות (הם 2 פתרונות בת"ל למדר לינארית מסדר 2) ולכן הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+c_2\cdot\left(e^{\frac{x^2}{2}}-1\right)$$

והנגזרת

$$y'=(c_1+c_2)\cdot x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

וכעת נוכל להציב תנאי התחלה.

$$0=y(1)=c_1\cdot\sqrt{e}+c_2\left(\sqrt{e}-1\right)$$

$$1=y'(1)=(c_1+c_2)\cdot\sqrt{e}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי

$$c_2=(c_1+c_2)\cdot\sqrt{e}$$

ששווה ל 1 לפי המשוואה השניה. לכן $c_2=1$ ובהצבה במשוואה הראשונה נקבל

$$c_1=-\frac{c_2\left(\sqrt{e}-1\right)}{\sqrt{e}}=-\frac{\left(\sqrt{e}-1\right)}{\sqrt{e}}$$

לכן סה"כ קיבלנו את הפתרון:

$$y(x)=c_1\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+c_2\cdot\left(e^{\frac{x^2}{2}}-1\right)=-\frac{\left(\sqrt{e}-1\right)}{\sqrt{e}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+\left(e^{\frac{x^2}{2}}-1\right).$$