פתרון מבחן דמה - חדו"א 1 לאודיסאה – 20/01/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(2x)(e^x-1)}{1-\cos(3x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(2x)\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}\cdot\frac{1}{9}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+1)+\ln(x^5+1)}{\ln(x+1)}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+1)+\ln(x^5+1)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right)+\ln\left(x^5\left(1+\frac{1}{x^5}\right)\right)}{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3)+\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)+\ln(x^5)+\ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\cdot\frac{8+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}{\ln(x)}}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}=8$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\to 1$$

לכן בסיס החזקה שואף ל1 ומותר להשתמש בכלל הe

$$\left(2-\frac{n+1}{n+2}\right)^n\to e^{\lim n\cdot\left(2-\frac{n+1}{n+2}-1\right)}=e^{\lim n\cdot\frac{n+2-(n+1)}{n+2}}=e^{\lim\frac{n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}}=e^1=e$$

.2

א. חשבו את $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-2x}}dx$

$$\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-2x}}dx = \left\{\begin{matrix} t=e^x \\ dt=e^x dx \\ x=\ln(t) \\ dx=\frac{1}{t}dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{t+\frac{1}{t}}{t^2-\frac{1}{t}}dt = \int \frac{t^2+1}{t^3-1}dt =$$

תזכורת: אם הפולינום $f(x)$ מתאפס בנקודה a כלומר $f(a)=0$ אז הפולינום $f(x)$ מתחלק ב$(x-a)$

כאן, t^3-1 מתאפס ב1 ולכן מתחלק ב$(t-1)$

$$\frac{t^2+1}{t^3-1} = \frac{t^2+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$t^2+1 = A(t^2+t+1)+(Bt+C)(t-1)$$

נציב $t=1$ ונקבל

$$2=3A \to A=\frac{2}{3}$$

נציב $t=0$

$$1=\frac{2}{3}-C \to C=-\frac{1}{3}$$

נציב $t=-1$

$$2=\frac{2}{3}+\left(-B-\frac{1}{3}\right)(-2) \to 2=\frac{4}{3}+2B \to B=\frac{1}{3}$$

$$\frac{t^2+1}{t^3-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{t-1}+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right]$$

כעת נחזור לאינטגרל

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt$$

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int \frac{1}{(t+a)^2+b^2}dt = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{t+a}{b}\right)^2+1}dt = \left\{\begin{matrix} u = \frac{t+a}{b} \\ du = \frac{1}{b}dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{b}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{b}\arctan(u) = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{t+a}{b}\right)$$

סה"כ:

$$\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-2x}}dx = \int \frac{t^2+1}{t^3-1}dt = \frac{2}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|e^x-1| + \frac{1}{6}\ln|e^{2x}+e^x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-2x}}dx$

ראשית נשים לב כי בתחום:

$$e^x - e^{-2x} = e^x(1-e^{-3x}) = e^x\left(1-\frac{1}{e^{3x}}\right) > 0$$

נבצע השוואה עם האינטגרל $\int_1^\infty 1dx$ כמובן שזה אינטגרל מתבדר.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-2x}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-3x}} = 1$$

לכן הם חברים וגם האינטגרל שלנו מתבדר.

3. יהי $a \in \mathbb{R}$ סקלר, ותהי פונקציה $f(x) = (x-a)e^x$

א. לכל ערך של a, מצאו את הערך המינימלי של $f(x)$ בכל $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = e^x(1+x-a)$$

$$1+x-a > 0$$

$$x > a-1$$

לכן הפונקציה עולה בתחום $[a-1,\infty)$ ויורדת בתחום $(-\infty, a-1]$

ולכן הפונקציה מקבלת את המינימום ב$x = a-1$ כלומר הערך המינימלי הוא

$$f(a-1) = -e^{a-1}$$

ב. לכל ערך של a, מצאו את כמות השורשים של הפונקציה $f(x)$.

$$(x-a)e^x = 0$$

$$x-a=0$$

$$x=a$$

כלומר לכל a יש בדיוק פתרון יחיד.

הערה: כשחיברתי את המבחן לא שמתי לב שאפשר לפתור כך בקלות, אך תשובה זו קיבלה ניקוד מלא.

בכל זאת נפתור בדרך הארוכה למרות שהיא מיותרת כאן.

בסעיף א' ראינו שהערך המינימלי תמיד מתחת לציר, נבדוק את גבולות הפונקציה בקצוות האחרים של תחום העלייה ותחום הירידה.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x-a)e^x = \infty$$

לכן יש נקודה מעל הציר בתחום $(a-1,\infty)$ ולכן כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות לפי ערך הביניים יש חיתוך בתחום זה, והוא יחיד בתחום זה כי מדובר בתחום עלייה.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-a)e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-a}{e^{-x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

לכן הפונקציה תמיד שלילית בתחום $(-\infty, a-1]$ כיוון שהיא בירידה ושואפת לאפס. ולכן אין חיתוך בתחום זה.

סה"כ קיבלנו שוב, אחרי הרבה עבודה מיותרת, שיש פתרון יחיד לכל a.

4. תהי סדרה חסומה a_n. לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר את $B_k = \{a_n | k < n \in \mathbb{N}\}$ להיות קבוצת איברי הסדרה אחרי המקום הk

א. הוכיחו שאם קיים $K_1 \in \mathbb{N}$ עבורו $\sup B_{K_1} = \inf B_{K_1}$ אזי הסדרה a_n מתכנסת.

ראשית עבור קבוצה לא ריקה כלשהי, אם $\sup A = \inf A$ אז הקבוצה מכילה איבר אחד בדיוק.

אכן, אחרת יש בקבוצה לפחות שני איברים $a<b$ ואז

$$\inf A \le a < b \le \sup A$$

לכן מנתון

$$B_{K_1} = \{L\}$$

לכן הסדרה קבועה L אחרי המקום K_1 ולכן מתכנסת לL.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\sup B_k \neq \inf B_k$, אזי לסדרה a_n אין גבול.

הפרכה פשוטה:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

יש לסדרה זו גבול, והיא אינה קבועה מאף שלב.

$$B_k = \left\{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\right\}$$

$$\sup B_k = \frac{1}{k+1}$$

$$\inf B_k = 0$$

והם אכן שונים.

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, וכן $a_1 = \frac{1}{2}$. חשבו את גבול הסדרה.

נציב כמה איברים ראשונים על מנת לחוש את הסדרה

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_3 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}, \qquad \dots$$

נדמה שהסדרה עולה, נוכיח את זה באידוקציה

בסיס האינדוקציה: אכן $a_1 < a_2$

יהי n עבורו $a_n < a_{n+1}$

צ"ל כי $a_{n+1} < a_{n+2}$

$$a_{n+1} < a_{n+2}$$

כלומר צ"ל

$$\sqrt{a_n} < \sqrt{a_{n+1}}$$

וזה נובע מהנחת האינדוקציה.

לכן כיוון שהסדרה עולה היא חסומה ומתכנסת למספר סופי או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

<u>**אם**</u> היא חסומה, נסמן $a_n \to L$ נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a_n}$$

$$L = \sqrt{L}$$

$$L^2 - L = 0$$

$$L(L-1) = 0$$

$$L = 0,1$$

כיוון שהסדרה עולה מתקיים כי $a_n \geq \frac{1}{2}$ ולכן $L \geq \frac{1}{2}$ ולכן האפשרות היחידה היא $L = 1$.

כעת נוכיח שהסדרה אכן חסומה ובזה נסיים את התרגיל.

נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n < 1$ באינדוקציה

עבור $n = 1$ אכן $a_1 = \frac{1}{2} < 1$

יהי n עבורו $a_n < 1$ צ"ל כי $a_{n+1} < 1$

ואכן

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} < \sqrt{1} = 1$$

ולכן סה"כ הוכחנו כי $a_n \to 1$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{4n}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

דרך אחת לפתרון:

נשים לב שמדובר בסכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$ הרציפה בקטע $[0,3]$ עם החלוקה $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{3n}{n}\right\}$ ובחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{3n}{n}\right\}$ ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל:

$$a_n \to \int_0^3 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^3 = \ln(4)$$

דרך שנייה לפתרון:

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3n} \cdot \frac{3}{1+3\cdot\frac{k}{3n}}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{3}{1+3x}$

הרציפה בקטע $[0,1]$ עם החלוקה

$$\left\{0, \frac{1}{3n}, \frac{2}{3n}, \dots, \frac{3n}{3n}\right\}$$

ובחירת הנקודות

$$\left\{\frac{1}{3n}, \frac{2}{3n}, \dots, \frac{3n}{3n}\right\}$$

ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל:

$$a_n \to \int_0^1 \frac{3}{1+3x} dx = [\ln(1+3x)]_0^1 = \ln(4)$$

דרך שלישית:

נתחיל מסכום רימן חצי קשור

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{k}{n}}$$

זה כבר סנטנדרטי, לא ארחיב במילים (במבחן כן תרחיבו) אבל

$$b_n \to \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3} + x} dx = \left[\ln\left(\frac{1}{3} + x\right)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(4)$$

כעת נביט בתת הסדרה במקומות $3n$

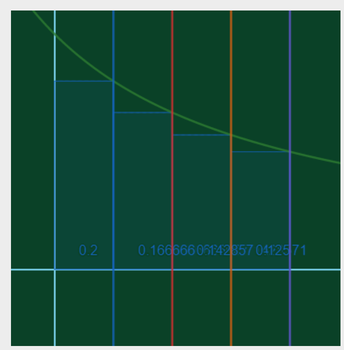
$$b_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{k}{3n}} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \to \ln(4)$$

ויצא במקרה ש $b_{3n} = a_n$

הערות כלליות על סכומי רימן

$$a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{4}{4}\right)$$



ב. מצאו מספר רציונאלי $a \in \mathbb{Q}$ המקיים כי

$$\sqrt{e} - \frac{1}{100} < a < \sqrt{e}$$

הערות כלליות לפני הפתרון:

בדר"כ במבחנים מבקשים למצוא קירוב למספר מסויים עד כדי שגיאה של h.

ואז אומרים סבבה, נקרב עם פולינום טיילור ונדאג שהשגיאה בערך מוחלט תהיה קטנה מh

$$f(x) \approx P_n(f,a)(x)$$

$$|R_n(f,a)(x)| < h$$

כאשר (ונכתוב כעת בקיצור)

$$R_n = f - P_n$$

כלומר אנחנו דורשים

$$|f - P_n| < h$$

זה אומר

$$f - h < P_n < f + h$$

במקרה שלנו, בואו נראה מה הדרישה על השגיאה

$$R_n = \sqrt{e} - a$$

$$\sqrt{e} - a > 0$$

$$\sqrt{e} - a < \frac{1}{100}$$

כלומר, בסה"כ דרשו כי

$$0 < R_n < \frac{1}{100}$$

כעת ניגש לפתרון התרגיל:

$$f(x) = e^x, x_0 = 0, x = \frac{1}{2}$$

לפי לגראנז' קיימת $0 < c < \frac{1}{2}$ כך ש

$$R_n = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^{n+1}$$

במזל יצא שבכל מקרה $0 < R_n$

$$0 < \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!\,2^{n+1}} < \frac{4}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$

המעבר הלפני האחרון בזכות ש e^x עולה, וכן $c < 1$, והמעבר האחרון בזכות ש $e < 4$.

עבור $n = 4$ אכן נקבל כי

$$0 < R_4 < \frac{4}{5!\,2^5} < \frac{1}{100}$$

ולכן התשובה שלנו היא

$$\sqrt{e} \approx a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}$$

הערות נוספות לגבי התרגיל:

אם היינו רוצים לקרב את $\sqrt{e}$ באמצעות $\sqrt{x}$ נעשה עבור $n = 1$ ונראה מה הבעייה

הנקודה המצוייה נניח $x_0 = 1$

$$P_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2}(e-1)$$

זה לא קירוב טוב כי אנחנו לא יודעים לחשב את $1 + \frac{1}{2}(e-1)$ בגלל e, ספיציפית בנוסח הזה של התרגיל זה ממש ברור כי לא מדובר במספר רציונאלי אבל תמיד זה מה שאנחנו רוצים גם אם לא אמרתי במפורש.

עוד הערה: אם היו מבקשים מאיתנו

$$\sqrt{e} < b < \sqrt{e} + \frac{1}{100}$$

הרי ישירות דרך הקירוב לא היינו מגיעים לזה, כי השגיאה תמיד חיובית!

אז היינו לוקחים את a מהשאלה שמקיים

$$\sqrt{e} - \frac{1}{100} < a < \sqrt{e}$$

ואז

$$\sqrt{e} < a + \frac{1}{100} < \sqrt{e} + \frac{1}{100}$$

ואז נבחר

$$b = \frac{1}{100}$$