מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ג מועד א'

30.8.2023

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: ראם וקסמן, רועי חסון, אלכסנדר טולסניקוב, כנה נהיר, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 107. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

שאלה 1. (27 נק') נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ובתת־הקבוצות

$$U = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, Av = 2v \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

א. הוכיחו כי U הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^4$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-U ול-W.

ג. מצאו בסיס ומימד ל-$U \cap W$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

שאלה 2. (20 נק') נביט ב-$\mathbb{R}_2[x] = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$, מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 2.

א. הוכיחו כי הקבוצה $B = \left\{1 + 2x, 2 + 3x + 4x^2, 1 - x^2\right\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

ב. נתבונן ב-B כבסיס סדור. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. תהי $T_a \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ההעתקה הלינארית המקיימת

$$\left[T_a\right]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & a \\ a & a^2+2 & 4a+2 \\ 1 & a-2 & a+1 \end{pmatrix}$$

מצאו (לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$) בסיס ומימד ל-$\ker T_a$ ול-$\operatorname{Im} T_a$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

שאלה 3. (21 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית כך ש-$\ker T \cap \operatorname{Im} T \neq \{0\}$.

א. הוכיחו: אם $U, W \leq V$ תת־מרחבים כך ש-$\dim U = 1$ ו-$U \cap W \neq \{0\}$, אז $U \subseteq W$.

ב. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $\dim V = 3$, אז $\ker T \subseteq \operatorname{Im} T$ או $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

ג. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $\dim V = 4$, אז $\ker T \subseteq \operatorname{Im} T$ או $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

שאלה 4. (18 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, יהיו B, C בסיסים סדורים של V, ותהי $T \colon V \to V$ העתקה לינארית.

א. הוכיחו כי $\det\left([T]_B^B\right) = \det\left([T]_C^C\right)$.

ב. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> $\mathrm{tr}\left([T]_B^B\right) = \mathrm{tr}\left([T]_C^C\right)$.

ג. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> $\mathrm{adj}\left([T]_B^B\right) = \mathrm{adj}\left([T]_C^C\right)$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

שאלה 5. (21 נק') נביט ב-$V_1 = \mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$, ונביט ב-$V_2 = \mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. כמו כן, נביט בקבוצה

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

א. הוכיחו כי $A \subseteq V_1$ היא תלויה לינארית.

ב. הוכיחו כי $A \subseteq V_2$ היא בלתי־תלויה לינארית.

ג. יהיו $U_1 \leq V_1$ ו-$U_2 \leq V_2$ תת־מרחבים כך ש-$U_1 = U_2$. הוכיחו כי $\dim U_2 = 2 \cdot \dim U_1$. (רמז: חלקו למקרים)

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___