פתרון תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 24.12.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. יהיו $f\colon G \to H$ ו-$g\colon H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f\colon G \to K$ היא הומומורפיזם.

פתרון. נתון שלכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$, ושלכל $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $g(h_1 h_2) = f(h_1)f(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i = f(g_i)$. לכן לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$(g\circ f)(g_1 g_2) = g(f(g_1 g_1)) = g(f(g_1)f(g_1)) = g(f(g_1))g(f(g_1)) = (g\circ f)(g_1)(g\circ f)(g_2)$$

ולכן $g \circ f$ הומומורפיזם.

ודאו שאתם יודעים לנסח טענה דומה לאפימורפיזמים, מונומורפיזמים ואיזומורפיזמים.

שאלה 2. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

ב. כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

ג. התמונה של כל הומומורפיזם $f\colon G \to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

פתרון.

א. למשל $SL_2(\mathbb{R})$ אינה אבלית, אבל היא נורמלית ב-$GL_2(\mathbb{R})$.

ב. למשל $\langle \tau \rangle$ היא תת־חבורה אבלית של D_4 שאינה נורמלית.

ג. למשל בשיכון הטבעי $f\colon \langle \tau \rangle \to D_4$ התמונה היא לא תת־חבורה נורמלית.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3.

א. מצאו את כל מחלקות הצמידות של D_4.
רמז: יש הרבה דרכים למצוא אותן, מבלי לחשב לכל איבר בנפרד לפי הגדרה. למשל אפשר להעזר בזה שכל איבר ניתן לכתוב בצורה $\tau^i\sigma^j$ או בכך שאתם כבר מכירים תת־חבורה נורמלית של D_4.

ב. תנו דוגמה לחבורה G, לתת־חבורה $H \leq G$ ולשני איברים $x, y \in H$ שהם צמודים ב-G, אבל אינם צמודים ב-H. רמז: הביטו למעלה.

פתרון.

א. יש חמש מחלקות צמידות:

$$\{\mathrm{id}\}\,,\ \left\{\sigma,\sigma^3\right\}\,,\ \left\{\sigma^2\right\}\,,\ \left\{\tau,\tau\sigma\right\}\,,\ \left\{\tau\sigma,\tau\sigma^3\right\}$$

אפשר לחשב רשימה זו בעזרת כמה שיטות. למשל אפשר לחשב ש-$Z(D_4) = \left\langle\sigma^2\right\rangle$ ומחלקת הצמידות של כל איבר מרכזי מכילה את אותו איבר בלבד, ושאר האיברים שייכים למחלקות צמידות עם יותר מאיבר אחד. כדי לראות למי σ צמוד ננסה להצמיד באיבר מן הצורה $\tau^i\sigma^j$. אם i זוגי, אז נקבל $\sigma^j\sigma\sigma^{-j} = \sigma$, ואם i אי זוגי נקבל

$$\tau\sigma^j\sigma\left(\tau\sigma^j\right)^{-1} = \tau\sigma^j\sigma\sigma^{-j}\tau = \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}\tau\tau = \sigma^3$$

או בדרך אחרת לפיה $\langle\sigma\rangle$ נורמלית ב-D_4, ולכן איחוד של מחלקות צמידות של D_4. אבל id במחלקת צמידות משל עצמו, ואילו σ לא מרכזי. כך אפשר להמשיך לשאר מחלקות הצמידות.

ב. נבחר $G = D_4$ ואת $H = \langle\sigma\rangle$. מפני ש-H ציקלית, אז היא אבלית ולכן מחלקת הצמידות של כל איבר $x \in H$ היא $\{x\}$. אבל אם נבחר $\sigma, \sigma^3 \in H$ לפי החישוב בסעיף הקודם ראינו שהם צמודים ב-G.
האם אפשר לבחור את H להיות לא אבלית? כן, אבל לא עבור $G = D_4$.

שאלה 4. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\operatorname{im} f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

ב. הוכיחו שאם G היא חבורת-p, אז גם $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p. הפריכו את הכיוון השני.

פתרון.

א. לכל $h_1, h_2 \in \operatorname{im} f$ קיימים $g_1, g_2 \in G$ כך ש-$f(g_i) = h_i$. נחשב

$$h_1h_2 = f(g_1)f(g_2) \overset{\star}{=} f(g_1g_2) \overset{*}{=} f(g_2g_1) \overset{\star}{=} f(g_2)f(g_1) = h_2h_1$$

כאשר בשיוויון המסומן $*$ השתמשנו באבליות של G, ובשיוויונות המסומנים $\star$ השתמשנו בכך ש-f הומומורפיזם. כלומר כל זוג איברים ב-$\operatorname{im} f$ מתחלפים, ולכן $\operatorname{im} f$ אבלית. כדי להפריך חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר את $G = S_3$. עבור H אפשר לבחור כל חבורה. למשל $H = \mathbb{Z}_5$. אז עבור ההומומורפיזם הטריוויאלי $f\colon S_3 \to \mathbb{Z}_5$ השולח כל איבר ל-0, נקבל $\operatorname{im} f = \{0\}$. כמובן שזו חבורה אבלית, אבל S_3 לא.

ב. תזכורת: חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של ראשוני מסוים p. לכל $h \in \operatorname{im} f$ קיים $g \in G$ כך ש-$h = f(g)$. לפי תרגיל שעשינו בכיתה $o(f(g))|o(g)$ ואנחנו יודעים ש-$o(g)$ הוא חזקה של p. לכן גם הסדר של $f(g)$ הוא חזקה של p. כלומר $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p.
כדי להפריך, גם כאן אפשר לבחור את ההומומורפיזם הטריוויאלי עבור חבורות

מתאימות, אבל ננסה משהו אחר. נבחר $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ואת $H = \mathbb{Z}_3$. עבור ההומומורפיזם נבחר את ההטלה $f\colon G \to H$ לפי $f((a,b)) = b$. התמונה היא חבורת-3, למעשה $\operatorname{im} f = H$. אבל G מסדר 6, שאינו חזקה של ראשוני, וראינו שחבורת-p סופית היא בהכרח מסדר חזקה של p.

שאלה 5. תהי G חבורת-p סופית ותהי $N \lhd G$ לא טריוויאלית. הוכיחו כי $Z(G) \cap N \neq \{e\}$.
רמז: G פועלת על N על ידי הצמדה. העזרו בטיעון דומה לזה שראינו בכיתה בהוכחה ש-$Z(G)$ לא טריוויאלית.

פתרון. נעזר ברמז, לפיו G פועלת על N על ידי הצמדה. לפי משוואת המחלקות

$$|N| = |\mathrm{fp}| + \sum |\mathrm{orb}(x_i)|$$

כאשר fp הוא אוסף נקודות השבת (Fixed points), והסכימה היא על נציגים של המסלולים שאינם נקודות שבת.

מי הם המסלולים בפעולה? אלו הן מחלקות צמידות של G. לכן N היא איחוד זר של מחלקות צמידות של G. מי הן נקודות השבת של הפעולה? איברים שנשמרים תחת הצמדה מ-G, כלומר איברים ב-$Z(G)$.

ידוע לנו שהסדר של N הוא חזקת p, וגם שהגודל של כל מחלקות צמידות של איברים לא מרכזיים הוא חזקה חיובית של p. כלומר $|N|$ הוא סכום חזקות של p. בנוסף מחלקת הצמידות של היחידה $e \in N \cap Z(G)$ היא מגודל 1. לכן בהכרח N מכילה מחלקות צמידות נוספות מגודל 1, שכן אחרת במשוואה לעיל אגף שמאל מתחלק ב-p ואילו אגף ימין לא. מחלקות הצמידות מגודל 1 ב-N הן כאמור אלו המכילות איברים של $Z(G)$.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ב. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_{>0}$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}_{>0}$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ג. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3,\, n \bmod 6)$.

ד. $f\colon S_6 \to U_7 \times U_{11}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

פתרון. ההוכחות כאן לא מלאות!

א. הפונקציה f היא הומומורפיזם. אבל היא לא מונומורפיזם כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. היא גם לא אפימורפיזם, כי למשל $-1 \notin \operatorname{im} f$, שהרי לכל $x \in \mathbb{Q}^*$ מתקיים $x^2 > 0$.

ב. הפונקציה f היא הומומורפיזם, באופן דומה לסעיף הקודם. אבל היא לא מונומורפיזם, שוב, כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. הפעם היא כן אפימורפיזם, כי לכל $x \in \mathbb{R}_{>0}$ קיים שורש רביעי $\sqrt[4]{x} \in \mathbb{R}^*$ שהוא ממשי שאינו אפס, ואז $f(\sqrt[4]{x}) = x$.

ג. הפונקציה היא הומומורפיזם, כשההוכחה מסתמכת על כך שחיבור מודולו n מוגדר היטב. היא לא מונומורפיזם, כי הסדר של המקור גדול ממש מסדר התמונה, או למשל כי $f(0) = f(6) = ([0], [0])$. היא לא אפימורפיזם, כי $\mathbb{Z}$ ציקלית ואילו $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ לא ציקלית, וכל התמונות של חבורה ציקלית הן ציקליות. אפשר גם להוכיח ישירות כי למשל $(1,3) \notin \operatorname{im} f$: אם n נשלח ל-$(1,3)$, אז לפי הרכיב השני $n \equiv 3 \pmod 6$, ונסיק $n \equiv 0 \pmod 3$. לא יתכן שבאותו הזמן גם $n \equiv 1 \pmod 3$.

ד. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל כי היחידה לא נשלחת ליחידה, או ש-$f(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}) \neq f(\mathrm{id}) f(\mathrm{id})$. בפרט זה לא מונומורפיזם או אפימורפיזם.

שאלה 7. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^3.

א. הוכיחו שניתן ליצור את G עם תת־קבוצה בת שלושה איברים $a,b,c\in G$ (כלומר $G=\langle a,b,c\rangle$). רמז: משפט לגראנז' כמה וכמה פעמים.

ב. בחרו p. תנו דוגמה מפורשת לחבורה G אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים $a,b\in G$, אבל לא עם איבר אחד.

ג. רשות: הראו שישנה חבורה לא אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים לפי ההדרכה הבאה: התבוננו בקבוצה (שכבר פגשנו מעל $\mathbb{R}$)

$$H(\mathbb{Z}_p)=\left\{\left.\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}\right| x,y,z\in\mathbb{Z}_p\right\}$$

ועל האיברים $a=\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right), b=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$. הראו כי $\left|\left\langle a, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle\right|=p^2$, והסיקו מזה ש-$H(\mathbb{Z}_p)=\langle a,b\rangle$.

פתרון.

א. כמסקנה ממשפט לגראנז' אנחנו יודעים שהסדרים האפשריים של איברים ב-G הם $\{1,p,p^2,p^3\}$. אם קיים איבר $a\in G$ מסדר p^3, אז G ציקלית ומתקיים $G=\langle a\rangle$. לכן נוכל לבחור **כל** זוג איברים $b,c\in G$, ויתקיים

$$G=\langle a\rangle\le\langle a,b,c\rangle\le G$$

כלומר $G=\langle a,b,c\rangle$.
אם לא קיים איבר מסדר p^3, אבל קיים איבר $a\in G$ מסדר p^2, אבל תת־החבורה $\langle a\rangle$ מכילה p^2 איברים. לכן קיים איבר $e\neq b\in G\setminus\langle a\rangle$ והסדר שלו הוא לפחות p. לכן

$$|\langle a,b\rangle|\ge|\langle a\rangle\cup\{b\}|>|\langle a\rangle|=p^2$$

כי $b\notin\langle a\rangle$. אבל הסדר של $\langle a,b\rangle$ חייב לחלק את p^3, ולכן הוא בדיוק p^3. כך נוכל לבחור כל איבר נוסף $c\in G$ ונקבל

$$G=\langle a,b\rangle\le\langle a,b,c\rangle\le G$$

ושוב נקבל $G=\langle a,b,c\rangle$.
אם לא קיימים איברים מסדר p^3 או p^2, אז הסדר של כל האיברים הוא p, פרט לאיבר היחידה. יהי $a\in G$ איבר מסדר p. אז $|\langle a\rangle|=p$. נבחר $e\neq b\in G\setminus\langle a\rangle$ מסדר p (ודאו שברור לכם למה קיים b כזה). אז לפי לגראנז' הסדר של תת־החבורה $\langle a,b\rangle$ מחלק את $|G|=p^3$, ובנוסף הוא חייב להיות גדול מ-p, כי $|\langle a\rangle\cup\{b\}|=p+1$. לכן $|\langle a,b\rangle|\ge p^2$. אם $|\langle a,b\rangle|=p^3$, נסיים כמו מקודם. אחרת, $|\langle a,b\rangle|=p^2$ ונוכל לבחור $e\neq c\in G\setminus\langle a,b\rangle$ מסדר p ומטיעון דומה נסיק $G=\langle a,b,c\rangle$.

ב. עד כדי איזומורפיזם, אפשר לבחור רק את $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_p$. למשל עבור $p=2$ נבחר את $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$, ואת האיברים $a=(1,0)$, $b=(1,1)$. זה מתאים למקרה השני של הסעיף הקודם, שבו אין איבר מסדר p^3, אבל $o(a)=p^2$ ובחרנו את $b\neq(0,0)$ כך ש-$b\notin\langle a\rangle$.

ג. ברור שחבורה לא אבלית לא ניתן ליצור עם איבר אחד. לפי ההדרכה נחשב כי $aba^{-1}b^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ (הוא גם איבר מסדר p). הכפל בחבורה מקיים

$$\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x'&z'\\0&1&y'\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+x'&xy'+z+z'\\0&1&y+y'\\0&0&1\end{pmatrix}$$

בתת־החבורה $\left\langle a, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle$ ליוצרים יש במיקום $(2,3)$ רכיב 0, ולכן באינדוקציה לכל איבר בתת־החבורה יש 0 במיקום $(2,3)$ (הראו שתת־החבורה איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$). אזי $b \notin \left\langle a, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle$ ולפי הסעיף הראשון נסיק שהיא מסדר p^3. אבל $\left\langle a, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ ולכן a, b יוצרים את $H(\mathbb{Z}_p)$.

שאלה 8. נאמר שפעולה של חבורה G על קבוצה X, כך ש-$2 < |X|$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו-$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

א. הוכיחו שאם G פועלת 2-טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי G פועלת 2-טרנזיטיבית אם ורק אם G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ והפעולה היא רכיב-רכיב.

ג. הוכיחו כי A_4 פועלת 2-טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.

ד. יהי F שדה, ונניח $2 < |F|$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית.

פתרון.

א. לכל שני איברים $x, y \in X$ ניקח איבר $x \neq z \in X$ (קיים כזה לפי הדרישה על הגודל של X).
נתבונן בזוגות $x \neq y$ ו-$x \neq z$. מכיוון שהפעולה היא 2-טרנזיטיבית יש $g \in G$ כך ש-$g * x = y$ (וגם $g * z = x$ אבל זה לא חשוב).

ב. יהיו $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ כלומר $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$. אם הפעולה של G היא 2-טרנזיטיבית, אז קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ ו-$g * x_2 = y_2$. לכן

$$g * (x_1, x_2) = (g * x_1, g * x_2) = (y_1, y_2)$$

בכיוון השני, אם $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$, אז $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ וקיים $g \in G$ כך ש-$g * (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. כלומר $g * x_i = y_i$.

ג. נסמן $X = \{1,2,3,4\}$. תהי $\sigma \in A_4$. הפעולה של σ על $i \in X$ היא $\sigma * i = \sigma(i)$.
לכל $(i,j), (k,l) \in X \times X \setminus \Delta$ אם $|\{i,j,k,l\}| = 4$ (כלומר כולם שונים), נבחר $\sigma = (ik)(jl) \in A_4$ ואז

$$\sigma * (i,j) = (\sigma(i), \sigma(j)) = (k,l)$$

אם $|\{i,j,k,l\}| = 3$ (כלומר יש בזוגות $(i,j), (k,l)$ איבר משותף אחד), אז בלי הגבלת הכלליות $i = k$ או $i = l$ וקיים $m \notin \{i,j,k,l\}$. אם $i = k$, נבחר את $\sigma = (jlm)$, ואם $i = l$ נבחר את $\sigma = (ikm)$.
לסיום, אם $|\{i,j,k,l\}| = 2$, אז יש שתי אפשרויות: או ש-$i = k, j = l$, ונבחר את $\sigma = \mathrm{id}$, או ש-$i = l, j = k$ ונבחר את $\sigma = (ij)(mm')$ עבור $m, m' \notin \{i,j,k,l\}$.
שימו לב שלכל $n \geq 4$ ניתן להרחיב הוכחה זו לכך ש-A_n פועלת 2-טרנזיטיבית על $\{1,2,\ldots,n\}$.

ד. בשביל טרנזיטיביות, מספיק להראות שיש וקטור שהמסלול שלו הוא כל $F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.
נראה זאת עבור הוקטור $\binom{1}{0}$. יהי $v \in F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ וקטור כלשהו, ונשלים אותו לבסיס (אפשר, כי הוא לא אפסי) $\{v, w\}$.
ידוע ממשפט ההגדרה (מאלגברה לינארית) שקיימת העתקה לינארית שמעבירה את $\binom{1}{0}$ ל-v ואת $\binom{0}{1}$ ל-w. מכיוון ש-$\{v, w\}$ הוא בסיס אז ההעתקה הזו היא הפיכה,

ולכן המטריצה המייצגת שלה תהיה מ-$GL_2(F)$.
אגב, אפשר להראות שאפילו $SL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2\setminus\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. נסו למצוא מטריצות מפורשות.
הפעולה היא לא 2-טרנזיטיבית, כי אי אפשר לשלוח שני וקטורים תלויים לינארית לשני וקטורים שאינם תלויים לינארית. למשל אם ניקח $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right)$ ואת $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, עבור $\alpha \neq 0,1$ (קיים α כזה כי $|F| > 2$). אז אין מטריצה A כך ש-$A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right)$ וגם $A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ שכן

$$A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \alpha \cdot A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$$

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. כהמשך לתוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, הוסיפו לה פונקציה המחשבת את גודל מחלקת הצמידות של תמורה ב-S_n, ופונקציה המחשבת את סדר המְרַכֵּז שלה.

שאלה 10 (לכבוד החנוכה)**.** תהי חנוכיה בצורה

(האיור מאת פרוייקט EmojiOne תחת רישיון CC BY-SA 4.0)

ונרצה לסדר בה תשעה נרות בארבעה צבעים אפשריים. נאמר ששני סידורי נרות הם שקולים אם אחד מהם מתקבל מן השני בסיבוב של המנורה (סביב השַמָּש שבאמצע).

א. תנו דוגמה לחבורה G ולפעולה של G על קבוצת סידורי הנרות, כך שהמסלולים של הפעולה הם בדיוק קבוצות של סידורי נרות שקולים.

ב. מצאו כמה סידורי נרות שונים ישנם עד כדי שקילות, בעזרת הפעולה מהסעיף הקודם.
רמז: אפשר לקרוא בויקיפדיה על הלמה שאינה של ברנסייד (וגם באנגלית).

שאלה 11. גרסה קשה יותר של שאלה 10: נניח שהחנוכיה היא עגולה, ושמונת הנרות נמצאים במרווחים שווים על ההיקף. גם עכשיו נאמר ששני סידורי נרות הם שקולים אם אחד מהם מתקבל מן השני בסיבוב של המנורה (סביב השַמָּש שבמרכז).
כמה סידורי נרות שונים ישנם, עד כדי שקילות? אפשר לנסות קודם גרסה קלה יותר שבה יש רק שני צבעים אפשריים לנרות.

בהצלחה!