# מבנים אלגבריים

## תרגיל בית 4[*]

1. תנו דוגמא נגדית לטענות השגויות הבאות
   - תהי $G$ חבורה מסדר זוגי. אם $x^3 = y^3$ אז $x = y$.
   - תהי $G$חבורה מסדר $n$. יש ב־$G$ איבר מסדר $n$.
   - כל חבורה אבלית מסדר $9$ היא ציקלית.
2. תהי $G$ חבורה, ותהי $I$ קבוצת אינדקסים, לתת־חבורות של $G$: לכל $i \in I$, $H_i \leq G$ ($I$ לא בהכרח סופית). הראו כי $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$.
3. תהי $G$ חבורה סופית, ו־$H$ תת־קבוצה לא ריקה של $G$ הסגורה לכפל[1]. הוכיחו כי $H$ תת־חבורה של $G$.

   **רמז** השתמשו בקריטריון **הארוך** לתת־חבורות.[2]
4. נניח $a \in H \leq G$[3]. הוכיחו כי הסדר של האיבר $a$ בחבורה $G$ שווה לסדרו בחבורה $H$.
5. תהיינה $(G, \bullet), (H, *)$ חבורות (לא קשורות זו לזו). נגדיר את **המכפלה הקרטזית** של החבורות $G$ו־$H$ להיות החבורה $G \times H$ עם הפעולה $\odot$ כדלהלן:

$$\forall g_1, g_2 \in G, \forall h_1 h_2 \in H, \quad (g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2)$$

   הוכיחו כי זו אכן חבורה.

**הערה 0.1** אנו צפויים לשוב ולהשתמש פעמים רבות במושג זה במהלך הקורס. בכל פעם שנדבר על החבורה $G \times H$ אנו נתכוון לפעולה הזו.

6. תהי $G = \langle g \rangle$ חבורה ציקלית מסדר $12$, ונסמן $H_1 = \langle g^3 \rangle$, $H_2 = \langle g^4 \rangle$. חשבו את האינדקסים של התת־חבורות האלו ב־$G$, ורשמו את כל הקוסטים השמאליים שלהן.

[*] להגשה עד ג' בטבת (25 דצמ')

[1] לכל $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $h_1 h_2 \in H$/

[2] הקריטריון הארוך לתת־חבורות הוא כדלהלן: תהי $H$ תת־קבוצה לא ריקה של החבורה $G$. אזי $H$ היא תת־חבורה של $G$ א.ס.ם.

(א) $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 h_2 \in H$.

(ב) $\forall h \in H, h^{-1} \in H$.

[3] דהיינו $G$ חבורה, $H$ תת־חבורה של $G$, ו־$a$ איבר של $H$.

**תזכורת (משפט אוילר)** יהי $a \in \mathbb{Z}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$. אם $(a,n) = 1$ אז $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

**תזכורת (משפט פרמה הקטן)** יהי $a \in \mathbb{Z}$ ויהי $p$ מספר ראשוני. אם $p \nmid a$ אז $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

7. חשבו: $6^{48} \pmod{11}$.
8. הוכיחו: $n^5 \equiv n \pmod{30}$.

בהצלחה!