

פונקציות מרוכבות – תרגיל 8

1. פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור סביב הנקודות הנתונות:

א. $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ סביב $z=0$.

ב. $f(z) = z^2 \sin z$ סביב $z = \frac{\pi}{2}$.

ג. $f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1 - z}$ סביב $z=0$ (מספיק שלושה איברים ראשונים).

2. תהי f פונקציה שלמה, אשר מקבלת ערכים ממשיים על הציר הממשי, וערכים מדומים טהורים על הציר המדומה. הוכיחו כי f אי זוגית.

3. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור סביב $z=1$ של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}}$. הביעו את התשובה רק באמצעות מספרים ממשיים ושורשים.

4. תהי f פונקציה שלמה, ונניח כי עבור $|z|$ גדול דיו מתקיים $|f(z)| \leq K|z|^\alpha$, עבור קבועים חיוביים K, α . הוכיחו כי f היא פולינום ממעלה $\lceil \alpha \rceil$.