

להגשה בתוך שבועיים

- (1) אדם מנסה לחייג לאוניברסיטה- מניסיונות קודמים ידוע כי ההסתברות לקבל מענה בכל ניסיון חיוג הוא 0.25 .  
 אדם שמחייג לאוניברסיטה ממשיך לחייג עד שמתקבל מענה- מה ההסתברות  
 (א) שיקבל מענה בניסיון ה-9?  
 (ב) שיקבל מענה לאחר יותר מ 4 ניסיונות חיוג?  
 (ג) חשבו את התוחלת של משתנה מקרי זה.

פיתרון

$$P(X = 9) = (0.75)^8 (0.25) = 0.02502$$

$$P(X > 4) = 1 - [P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - (0.75)^3(0.25) - (0.75)^2(0.25) - (0.75)(0.25) - (0.25) = 0.5664$$

- (2) רוני מקבל דמי כיס פעם בחודש ואז הוא מחליט אם לקנות לעצמו ספר חדש או לא.  
 ההסתברות שרוני יקנה ספר חדש היא 0.6. נניח שבהתחלה לא היה לרוני אף ספר.  
 (א) מהי ההסתברות שאחרי 10 חודשים, יש לרוני 6 ספרים?  
 (ב) מהי תוחלת ושונות מספר הספרים שיש לרוני בתום שנה?  
 (ג) מה ההסתברות שלרוני יהיו 4 ספרים בדיוק לאחר חצי שנה?

פיתרון

$X =$  מספר הספרים שיש לרוני לאחר תקופה מסוימת.  
 (א)

$$X \sim Bin(10, 0.6)$$

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} (0.6)^6 (0.4)^4 = 0.2580$$

(ב)

$$X \sim Bin(12, 0.6)$$

$$E(X) = np = 12 \cdot (0.6) = 7.2$$

$$V(X) = npq = 12 \cdot (0.6) \cdot (0.4) = 2.88$$

(ד) בחודש השישי הוא קונה ספר רביעי, אך לא ידוע מתי קנה את 3 הספרים הראשונים.

$$X \sim Bin(5, 0.6)$$

$$P(X = 3) \cdot (0.6) = \left[ \binom{5}{3} (0.6)^3 (0.4)^2 \right] \cdot (0.6) = 0.20736$$

// הערה- זוהי בדיוק התפלגות בינומית שלילית שנלמד בהמשך.

- (3) בליל קיץ ניתן לצפות בכוכב נופל אחד כל 10 דקות. מה ההסתברות לצפות ב2 כוכבים נופלים בטווח של 15 דקות?

פיתרון:

(כלומר 10 דקות = יחידת הזמן שלנו).  
 נסמן בX את מספר הכוכבים הנופלים.  
 כוכב אחד נופל כל 10 דקות

$$X \sim Poi(1)$$

$$P(1.5X = 2) = \frac{e^{-1 \times 1.5} (1 \times 1.5)^2}{2!} = 0.25$$

מבקרת מהמרת בקזינו ב \$5 על אדום ברולטה, שוב ושוב עד לזכייתה הרביעית. (4)

בכל הימור היא מרוויחה \$5 בהסתברות  $\frac{18}{38}$  או מפסידה \$5 בהסתברות  $\frac{20}{38}$

(א) מהי ההסתברות שהיא תהמר 9 פעמים בסה"כ?

(ב) מהי תוחלת הרווח של המהמרת בהפסיקה לשחק?

**פיתרון:**

(א) מספר ההימורים עד לזכייתה הרביעית של המהמרת הוא מ"מ בינומי שלילי

עם הפרמטרים 4 ו  $\frac{18}{38}$  ולכן ההסתברות שתהמר 9 פעמים בסה"כ

$$P(X = 9) = \binom{8}{3} \left(\frac{18}{38}\right)^4 \left(\frac{20}{38}\right)^5 \approx 0.1139$$

(ב) יהי W הרווח של המהמרת ויהי X מספר ההימורים שהשתתפה בהם עד לזכייתה הרביעית.

מכיוון שהמהמרת זוכה 4 פעמים בסה"כ לכן מפסידה  $X - 4$  בסה"כ.

$$W = 4 \cdot 5 - (X - 4) \cdot 5 = 40 - 5X$$

$$E(W) = 40 - 5E(X) = 40 - 5 \cdot \frac{4}{\frac{18}{38}} = -\frac{20}{9}$$

קמעוני רוכש רכיבים חשמליים בחבילות של 10 יחידות. (5)

הרכישה של כל חבילה מתבצעת רק לאחר שהוא בודק באקראי 3 רכיבים מתוכה, ומצא שהם תקינים.

אם ב 30% מהחבילות יש 4 רכיבים פגומים וב- 70% יש רכיב 1 פגום, איזה % מהחבילות שבדק אין הקמעוני רוכש?

**פיתרון**

נסמן ב A את המאורע שהקמעוני רוכש חבילה. לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה ולפי מם גיאומטרי:

$$P(A) = P(A|4 \text{ damage components}) \cdot 0.3 + P(A|1 \text{ damage component}) \cdot 0.7$$

$$= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{3}{10} + \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$

כד מכיל 4 כדורים לבנים ו4 כדורים שחורים. (6)

מוציאים באקראי 4 כדורים ללא החזרה.

אם 2 מהם לבנים ו2 שחורים הניסוי מסתיים.

אם לאו, מחזירים את הכדורים לכד ושוב מוציאים באקראי 4 כדורים וממשיכים כקודם עד שיש בדיוק 2 לבנים בין ה4 שהוצאו.

מה ההסתברות לחזור על הניסוי בדיוק n פעמים?

**פיתרון**

שימו ♥ שמבצעים חזרות ב"ת של הניסוי המקרי: הוצאת מדגם של 4 כדורים מתוך כד המכיל 4 כדורים לבנים ו4 שחורים.

הצלחה בניסוי היא הוצאת 4 כדורים שבדיוק 2 מהם לבנים.

מספר הכדורים המוצאים במדגם הוא מ"מ היפרגאומטרי עם הפרמטרים  $m=4$   $N=8$   $n=4$

ולכן ההסתברות להצלחה בכל אחת מהחזרות היא:

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}$$

כעת נסמן ב-X את מספר החזרות על הניסוי עד לקבלת ההצלחה הראשונה. X הוא מ"מ גאומטרי עם הפרמטר  $\frac{18}{35}$  ולכן:

$$P(X = n) = \left(1 - \frac{18}{35}\right)^{n-1} \cdot \frac{18}{35} = \left(\frac{17}{35}\right)^{n-1} \cdot \frac{18}{35}$$

- (7) בקופסא 20 רכיבים, 4 מתוכם מקולקלים, מוציאים 5 רכיבים מתוך הקופסה באופן אקראי.
- (א) מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהרכיבים שהוצא מקולקל?
- (ב) ידוע כי לכל היותר שניים מהרכיבים שנותרו בקופסא מקולקלים, מה תהיה תוצאת סעיף א?
- (ג) ידוע כי לפחות שניים מהרכיבים שנותרו בקופסא מקולקלים, מה תהיה תוצאת סעיף א?

**פתרון**

(א)

נגדיר  $X$  – מ"מ הסופר את כמות הרכיבים המקולקלים שנשלפו בהוצאת 5 מתוך קופסא של 20 שבתוכם 4 היו מקולקלים.

$$X \sim HG(20, 4, 5)$$

$$\text{support}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{4}{0} \binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{16}{4}}{\binom{20}{5}} = 0.3994453$$

(ב)

$$P(X \leq 1 | X \leq 2) = \frac{P(X \leq 1 \cap X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X = 0) + P(X = 1)}{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}$$

$$= \frac{0.3994453}{0.3994453 + \frac{\binom{4}{2} \binom{16}{3}}{\binom{20}{5}}}$$

(ג)

$$P(X \leq 1 | X \geq 2) = \frac{P(X \leq 1 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(\emptyset)}{P(X \geq 2)} = \frac{0}{P(X \geq 2)} = 0$$

(8) מספר הביטים השגויים  $X$  בתשדורת מתפלג פואסונית עם תוחלת 4.

ההסתברות שהמסר יפוענח, אם נעשו  $n$  שגיאות הוא  $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(א) מה ההסתברות שהמסר יפוענח?

(ב) אם ידוע שהמסר פוענח, מה ההתפלגות של  $X$ ?

**פתרון**

(א)

$$P(\text{Pass}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pass} | X = n) P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{4^n e^{-4}}{n!} = \frac{e^{-4}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^n}{n!} = \frac{e^{-4}}{3} \cdot e^{\frac{8}{3}} = \frac{1}{3} e^{-\frac{4}{3}}$$

(ב)

$$P(X = t | \text{Pass}) = \frac{P(X = t \cap \text{Pass})}{P(\text{Pass})} = \frac{P(\text{Pass} | X = t) P(X = t)}{P(\text{Pass})} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^t \frac{4^t e^{-4}}{t!}}{\frac{1}{3} e^{-\frac{4}{3}}} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^t e^{-\frac{8}{3}}}{t!}$$

$$X | \text{Pass} \sim \text{Pois}\left(\frac{8}{3}\right)$$