

## תרגיל 8

20 בדצמבר 2015

1. א. תהינה  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  פונקציות כך שהרכבה  $g \circ f$  על. הוכח או הפרך:  
ג. על  $g$ .  
ד. על  $f$ .
- ב. היעזר בשאלה זו, ובמה שעשינו בכיתה בדומה לזה לגבי חד־חד־ערכיות, והראה שאם פונקציה  $f : A \rightarrow B$  היא הפיכה אז היא חח"ע ועל.
- ג. תהי  $f : A \rightarrow B$  פונקציה חח"ע ועל. הוכח שהיא הפיכה (רמז: בנה לה את הפונקציה ההופכית).
- ד. הערה: בזאת הוכחנו כי פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.
2. תהי  $f : X \rightarrow Y$  פונקציה ו- $B \subseteq Y$ .  
א. הוכח כי:  $f^{-1}(B) \subseteq B$ , ושיש שיוויון אם  $f$  על.  
ב. מצא דוגמה לפונקציה כנ"ל כך שהכלה היא הכלה ממש.
3. תהי  $f : A \rightarrow B$ ,  $|A| = |B| = n$ , הוכח  $f$  חח"ע אם"מ  $f$  על.
4. תהינה  $A, B$  קבוצות לא ריקות. הוכיחו כי קיימת פונקציה חח"ע  $f : A \rightarrow A \times B$ .
5. האם הפונקציות הבאות הן חח"ע? על?  
א.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  המוגדרת ע"י  $f(n) = |n|$ .  
ב.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת ע"י  $f(x) = x^3$ .  
ג.  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת ע"י  $f(q) = e^q$ .  
ד. תהי  $A$  קבוצה ו- $f : P(A) \rightarrow P(A)$  פונקציה המוגדרת לפי  $f(B) = A \setminus B$ .  
ה. תהי  $A$  קבוצה,  $B \subset A$  (מוכל ממש) תת קבוצה, ו- $f : P(A) \rightarrow P(B)$  פונקציה

המוגדרת לפי  $f(C) = C \cap B$   
 נ. תהי  $A$  קבוצה,  $B \subseteq A$  (מוכל ממש) תת קבוצה, ו- $f : P(B) \rightarrow P(A)$  פונקציה  
 המוגדרת לפי  $f(C) = C \cup (A \setminus B)$ .

6. תהי  $f : X \rightarrow Y$  פונקציה ותהיינה תתי הקבוצות  $A_1, A_2 \subseteq X, B_1, B_2 \subseteq Y$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

ב.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .

ג.  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .

ד.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

ה.  $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$ .

ו.  $f(A_1^c) = (f(A_1))^c$ .

ז.  $f(A_1 \Delta A_2) = f(A_1) \Delta f(A_2)$ .

ח.  $f^{-1}(B_1 \Delta B_2) = f^{-1}(B_1) \Delta f^{-1}(B_2)$ .

7. שאלה ממבחן: תהי  $X$  קבוצה,  $f : X \rightarrow X$  פונקציה, ותהיינה  $A, B \subseteq X$  הוכח או הפרד:

$$f(A \setminus B^c) = f(A) \setminus (f(B))^c$$