יודעים אנו כי קיים לפחות דבר אחד שהוא גם ציפור וגם מוחזק בשבי. אילו היינו רשאים לקבוע לו את השם a, יכולנו, כמובן, לטעון $Ca \cdot Sa$ — אך איננו רשאים לעשות שום קביעה כזאת של a, שכן הוא כבר נוצל לפני־כן בשורה 3 כדי לשמש שם לאליגטור המוחזק בשבי. כדי להימנע מטעויות כאלה, חייבים אנו לציין להגבלה שצויינה — כל אימת שאנו משתמשים בהמחשה ישית. הדיון הקודם חייב להבהיר כי בכל הוכחה המצריכה את השימוש בהמחשה ישית ובהכללה ישית כאחד, חובה להשתמש בהמחשה ישית ראשונה.

לאופני הארגומנטציה המסובכים יותר, במיוחד אלה המכילים יחסים, חובה להטיל הגבלות נוספות מסויימות על ארבעת חוקי הכימות שלנו. אולם לארגומנטים מן הסוג הנוכחי, מספיקות ההגבלות הנוכחיות כדי למנוע היסקים מוטעים.

תרגילים

בנה הוכחה צורנית לתקפותו של כל אחד מן הארגומנטים הללו, והשתמש בכל מקרה בסימון המוצע:

* 1. שום ספורטאי איננו תולעת־ספרים. גד הוא תולעת־ספרים. לכן גד איננו ספורטאי. (Sx, Tx, g).

2. כל הרקדנים הם נשיים. סייפים אחדים אינם נשיים. לכן סייפים אחדים אינם רקדנים. (Rx, Nx, Sx).

3. שום קוביוסטוס איננו מאושר. אידיאליסטים אחדים הם מאושרים. לכן אידיאליסטים אחדים אינם קוביוסטוסים. (Kx, Mx, Ix).

4. כל הליצנים הם רמאים. שום רמאי איננו מצליח. לכן שום ליצן איננו מצליח. (Lx, Rx, Mx).

* 5. כל מטפסי־ההרים הם ידידותיים. פושעים אחדים הם מטפסי־הרים. לכן פושעים אחדים הם ידידותיים. (Mx, Yx, Px).

6. רק פציפיסטים הם קווייקרים. קיימים קווייקרים דתיים. לכן פציפיסטים הם לפעמים דתיים. (Px, Qx, Dx).

7. להיות נוכל פירושו להיות גנב. אך ורק המקופחים הם גנבים. לכן נוכלים הם תמיד מקופחים. (Nx, Gx, Mx).

8. שום כנר איננו לא־עשיר. אין שום פסנתרן עשיר. לכן כנר לעולם איננו פסנתרן. (Kx, Ax, Px).

9. רק האמיצים ראויים לתהילה. רק חיילים הם אמיצים. לכן רק החיילים ראויים לתהילה. (Tx : x ראוי לתהילה; Ax : x אמיץ; Hx : x חייל).

10. כל המבקש נענה. שמעון איננו נענה. לכן שמעון איננו מבקש. (Mx, Nx, s).

V. הוכחת אי־תקפות

כדי להוכיח אי־תקפותו של ארגומנט המכיל כמתים, באפשרותנו להשתמש בדרך ההפרכה בעזרת אנלוגיה לוגית. למשל, הארגומנט "כל הקומוניסטים הם מתנגדי המימסד; צירים אחדים הם מתנגדי המימסד; לכן צירים אחדים הם קומוניסטים" מוכח כלא־תקף בעזרת האנלוגיה "כל התתולים הם חיות; כלבים אחדים הם חיות; לכן כלבים אחדים הם התולים"; אשר אי־תקפותה גלויה לעין משום שידוע כי הקדמותיה אמיתיות וידוע כי מסקנתה שקרית. אולם לא תמיד קל להמציא אנלוגיות כאלה. רצויה איזו דרך יעילה יותר להוכחת אי־תקפות.

בפרק הקודם פיתחנו דרך להוכיח אי־תקפותם של ארגומנטים המכילים טענות מורכבות. דרך זו היתה עשויה מקביעת ערכי־אמת לטענות הפשוטות שהיו רכיביהם של הטענות המורכבות שבארגומנטים — באופן כזה שהקדמותיהם יהיו אמיתיות ומסקנותיהם שקריות. אפשר להתאים דרך זו לארגומנטים המכילים כמתים. ההתאמה כרוכה בהנחתנו הכללית, שקיים לפחות יחיד אחד בעולם. כדי שארגומנט המכיל כמתים יהיה תקף, מן ההכרח שלא יהא אפשר שהקדמותיו אמיתיות ומסקנתו שקרית כל עוד קיים לפחות יחיד אחד.

ההנחה הכללית כי קיים לפחות יחיד אחד באה על סיפוקה אם קיים בדיוק יחיד אחד, או בדיוק שני יחידים, או בדיוק שלושה יחידים, וכך הלאה. אם מניחים איזו הנחה מאלה בדבר מספרם המדוייק של היחידים הקיימים, ישנה שקילות בין טענות כלליות וטענות מורכבות באמצעות קשרי־אמת. אם קיים בעולם יחיד אחד בדיוק, נאמר a, הרי:

$$(x)\phi x \equiv \phi a \equiv (\exists x)\phi x$$

אם קיימים בעולם בדיוק שני יחידים, נאמר a ו־b, הרי:

$$(x)\phi x \equiv [\phi a \cdot \phi b] \text{ ו־ } (\exists x)\phi x \equiv [\phi a \vee \phi b]$$

אם קיימים בדיוק שלושה יחידים, נאמר a, b ו־c, הרי:

$$(x)\phi x \equiv [\phi a \cdot \phi b \cdot \phi c] \text{ ו־} (\exists x)\phi x \equiv [\phi a \vee \phi b \vee \phi c]$$

באופן כללי, אם קיימים בדיוק n יחידים, נאמר a, b, c, ..., n, הרי:

$$(x)\phi x \equiv [\phi a \cdot \phi b \cdot \phi c \cdot \ldots \cdot \phi n]$$

$$\text{ו־} (\exists x)\phi x \equiv [\phi a \vee \phi b \vee \phi c \vee \ldots \vee \phi n]$$

שקילויות אלה אמיתיות כתוצאה מהגדרותינו של הכמת הכולל והכמת היישי. לא נעשה כאן שום שימוש בארבעת כללי הכימות שהוסברו בחלק הקודם.

ארגומנט המכיל כמתים הוא תקף אם ורק אם הוא תקף בלי שום קשר למספר היחידים שישנם בעולם, בתנאי שקיים לפחות יחיד אחד. וכך, ארגומנט המכיל כמתים מוכח כלא־תקף אם קיים עולם אפשרי המכיל לפחות יחיד אחד כך שהקדמות הארגומנט הן אמיתיות ומסקנתו שקרית ביחס לאותו עולם. ראה את הארגומנט: ״כל החיילים השכירים הם לא־נאמנים. שום לוחם גרילה איננו חייל שכיר. לכן שום לוחם גרילה איננו לא־נאמן״. אפשר לסמלו כך:

$$(x)[Sx \supset Lx]$$
$$(x)[Gx \supset \sim Sx]$$
$$\therefore (x)[Gx \supset \sim Lx]$$

אם קיים בעולם יחיד אחד בדיוק, נאמר a, ארגומנט זה שקול מבחינה לוגית לזה:

$$Sa \supset La$$
$$Ga \supset \sim Sa$$
$$\therefore Ga \supset \sim La$$

אפשר להוכיח כי האחרון איננו תקף בקבענו ערך אמת אמיתי ל־Ga ול־La ושקרי ל־Sa. (קביעה זו של ערכי אמת היא דרך מקוצרת של תאור העולם האפשרי (או הדגם האפשרי) הנדון כעולם המכיל רק את היחיד a, שהוא לוחם גרילה ולא־נאמן, אך איננו חייל שכיר.) מכאן שהארגומנט המקורי איננו תקף ביחס לעולם אפשרי המכיל יחיד אחד בדיוק, ולפיכך הוא לא־תקף. באופן דומה, נוכל להוכיח את אי־תקפותו של הארגומנט הראשון

שהוזכר בחלק זה, בתארנו עולם אפשרי המכיל בדיוק יחיד אחד ששמו a, כך ש־Ma ו־Za נקבעים כאמיתיים ו־Ca נקבע כשקרי.[6]

ארגומנטים אחדים, למשל:

$$(\exists x)\ Fx$$
$$\therefore (x)\ Fx$$

עשויים להיות תקפים לכל עולם שבו יש יחיד אחד בדיוק, אך לא־תקפים לכל עולם אפשרי המכיל שני יחידים או יותר. גם ארגומנטים כאלה יש למנות כלא־תקפים. דוגמה אחרת לסוג ארגומנט זה היא: ״כל כלבי־הקולי הם רוחשי־חיבה. כלבי־קולי אחדים הם כלבי־שמירה. לכן כל כלבי־השמירה הם רוחשי־חיבה״. תרגומו הסמלי הינו:

$$(x)\ [Cx \supset Rx]$$
$$(\exists x)\ [Cx \cdot Sx]$$
$$\therefore (x)\ [Sx \supset Rx]$$

לעולם אפשרי המכיל בדיוק יחיד אחד ששמו a, תרגום זה שקול מבחינה לוגית עם:

$$Ca \supset Ra$$
$$Ca \cdot Sa$$
$$\therefore Sa \supset Ra$$

שהוא תקף. אולם לעולם אפשרי המכיל שני יחידים, a ו־b, הוא שקול מבחינה לוגית עם:

$$(Ca \supset Ra) \cdot (Cb \supset Rb)$$
$$(Ca \cdot Sa) \vee (Cb \cdot Sb)$$
$$\therefore (Sa \supset Ra) \cdot (Sb \supset Rb)$$

---

6. כאן אנו מניחים כי הפרדיקטים הפשוטים Ax, Bx, Cx, Dx וכולי המופיעים בפסוקינו אינם לא הכרחיים, דהיינו אמיתיים מבחינה לוגית לכל היחידים (למשל, x זהה לעצמו), ולא בלתי־אפשריים, דהיינו שקריים מבחינה לוגית לכל היחידים (למשל, x שונה מעצמו). אנו גם מניחים כי היחסים הלוגיים היחידים בקרב הפרדיקטים הפשוטים המעורבים בכך הם אותם יחסים הנטענים או המוסקים באופן לוגי מן ההקדמות. תכליתן של הגבלות אלה היא להתיר לנו לקבוע ערכי אמת באורח שרירותי למקרי הצבה של פרדיקטים פשוטים אלה בלי שום אי־עקביות — שכן עולם אפשרי חייב להיות עולם עקבי.

המוכח כלא־תקף בקבענו כערך אמיתי ל־Ca, ‏Ra, ‏Sa, ‏Sb ושקרי ל־Cb ו־Rb. מכאן שהארגומנט המקורי איננו תקף לעולם אפשרי המכיל בדיוק שני יחידים, ולפיכך הוא לא־תקף. לארגומנט לא־תקף כלשהו מסוג כללי זה אפשר לתאר עולם אפשרי המכיל איזה מספר מוגבל של יחידים אשר להם אפשר להוכיח כלא־תקף את הארגומנט הבנוי רק מפונקציות האמת השקול לו מבחינה לוגית, בדרך של קביעת ערכי אמת.

חובה עלינו להדגיש שוב כי בעברנו מארגומנט נתון המכיל טענות כלליות לארגומנט הבנוי רק מפונקציית אמת השקול לוגית לארגומנט הנתון כשמדובר בעולם אפשרי מוגדר במדוייק, לא עשינו שום שימוש בארבעת כללי הכימות שלנו. במקום זאת, כל טענה של ארגומנט פונקציית האמת שקול מבחינה לוגית לטענה הכללית המקבילה לו בארגומנט הנתון, הודות לשקילויות אשר אמיתותן הלוגית לעולם האפשרי הנדון נובעת מעצם הגדרותיהם של הכמת הכולל והכמת היישי.

תרגילים

הוכח את אי־תקפותם של הארגומנטים הללו, בהשתמשך בכל מקרה בסימון המוצע:

* 1. כל האנרכיסטים הם מזוקנים. כל הקומוניסטים הם מזוקנים. לכן כל האנרכיסטים הם קומוניסטים. (Ax, ‏Mx, ‏Cx).

2. שום דיפלומט איננו קיצוני. פנטים אחדים הם קיצוניים. לכן דיפלו־מטים אחדים אינם פנטיים. (Dx, ‏Cx, ‏Fx).

3. כל הגנרלים הם יפי־תואר. אינטלקטואלים אחדים הם יפי־תואר. לכן גנרלים אחדים הם אינטלקטואלים. (Gx, ‏Yx, ‏Ix).

4. עתונאים אחדים הם "קיביצרים". "קיביצרים" אחדים אינם מצליחים. לכן עתונאים אחדים אינם מצליחים. (Ix, ‏Kx, ‏Mx).

* 5. ממורמרים אחדים הם רעשניים. פקידי־ממשלה אחדים אינם רעש־ניים. לכן שום פקיד־ממשלה איננו ממורמר. (Mx, ‏Rx, ‏Px).

6. רופאים אחדים הם רופאי־אליל. רופאי־אליל אחדים אינם אחראים. לכן רופאים אחדים אינם אחראים. (Rx, ‏Ex, ‏Ax).

7. פוליטיקאים אחדים הם מנהיגים. מנהיגים אחדים אינם נואמים מחוננים. לכן נואמים מחוננים אחדים אינם פוליטיקאים. (Px, ‏Mx, ‏Nx).

8. אך ורק האמיצים ראויים לתהילה. כל חייל הוא אמיץ. לכן אך ורק החיילים ראויים לתהילה. (Tx: ‏x ראוי לתהילה; Ax: ‏x אמיץ; Hx: ‏x חייל).

9. אם משהו הינו מתכתי, הוא שביר. ישנם תכשיטים שבירים. לכן יש תכשיטים מתכתיים. (Sx, ‏Hx, ‏Mx).

VI. היסק אסילוגיסטי

כל הארגומנטים שנסקרו בשני החלקים הקודמים היו בעלי הצורה הנקראת במסורת היקשים החלטיים. הם מורכבים משתי הקדמות וממסקנה אחת, שכל אחת מהן ניתנת לניתוח אם כפסוק פרטי ואם כאחד מפסוקי A, ‏E, ‏I, ‏O השונים. אנו פונים עתה לבעיית הערכתם של ארגומנטים מסו־בכים יותר במידת־מה. אין הם מצריכים מנגנון לוגי גדול מן המנגנון שכבר פותח. בכל זאת הם ארגומנטים אסילוגיסטיים ומצריכים לוגיקה חזקה יותר מזו ששימשה באורח מסורתי לבחינתם של היקשים החלטיים.

בחלק זה אנו עוסקים עדיין בפסוקים כלליים שנוצרו בעזרת כימות פונקציות פסוקיות המכילות רק מישתנה אינדיווידואלי בודד. בהיקש ההחלטי, סוגי הפונקציות הפסוקיות היחידים שכומתו היו בעלי הצורות $\phi x \supset \psi x$, $\phi x \supset \sim \psi x$, $\phi x \cdot \psi x$, ו־$\phi x \cdot \sim \psi x$. אולם עתה נכמת פונקציות פסו־קיות אשר להן מבנים פנימיים מסובכים יותר. דוגמה תסייע להבהיר זאת. התבונן בארגומנט:

בתי־מלון הם יקרים ומדכאים כאחד.
בתי־מלון אחדים הם מרופטים.
לכן דברים יקרים אחדים הם מרופטים.

ארגומנט זה, על־אף תקפותו הגלויה לעין, איננו כפוף לסוג הניתוח המסורתי. למען האמת, אפשר היה להביעו במונחיהם של פסוקי A ו־I בהשתמשנו בסמלים Bx, ‏Cx, ‏Mx, ‏Yx כדי לסמן בקיצור את הפונקציות הפסוקיות "x הוא בית־מלון", "x הוא יקר ומדכא כאחד", "x הוא מרופט" ו"x הוא יקר",