תרגיל בית 7

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה .

ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי - הינה רציפה.

ג. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3\subseteq\tau_2$ וגם $\tau_1\subseteq\tau_4$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ וגם $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

<u>שאלה 2</u>

כזכור נאמר שמרחב טופולוגי הוא ממימד אפס אם קיים בסיס לטופולוגיה המורכב מקבוצות סגוחות.

א) הוכיחו כי $B=\{a+5^n\mathbb{Z}: \quad a\in\mathbb{Z}, \quad n\in\mathbb{N}\}$ בסיס למרחב המטרי $(\mathbb{Z},d_5)$ (d_5 המטריקה ה-5-אדית).

ב) הוכיחו כי $(\mathbb{Z},d_5)$ ממימד אפס.

ג) הוכיחו שהישר של סורגנפריי ממימד אפס.

<u>שאלה 3:</u>

יהי X מ"ט. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א) X מרחב T_4.

ב) X מרחב T_1 ולכל קבוצה סגורה $F\subseteq X$, ולכל $U\subseteq X$ פתוחה כך ש $F\subseteq U$ קיימת V פתוחה כך ש $F\subseteq V\subseteq cl(V)\subseteq U$.

שאלה 4:

א) יהי (X,τ) מ"ט סופי. הוכיחו כי (X,τ) הוא מרחב T_1 אם"ם הוא מרחב T_2.
ב) יהיו X,Y מ"ט כך ש Y האוסדורף. אם קיימת $f:X\to Y$ רציפה וחח"ע, אזי X האוסדורף.
ג) הראו שמרחב טופולוגי הוא האוסדורף אם ורק אם לכל $x\in X$ החיתוך של כל הסביבות הסגורות של x הוא הנקודון $\{x\}$.

שאלה 5:

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו-T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכחתם שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. נסמן את הטופולוגיה הזו ב- τ.

א) הראו ש $O\in\tau$ אם ורק אם $O=B\cap T$ כאשר B תת קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u> ו- $T\subseteq S^C$.
ב) הראו שאם $O\in\tau$ כך ש $S\subseteq O$ אז O פתוחה <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>.
ג) הוכיחו שלא קיימות $U,V\in\tau$ זרות כך ש $0\in V,\quad S\subseteq U$. הסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)\notin T_3$.

שאלה 6:

א) תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין מ"ט ויהי B בסיס של Y. הוכיחו ש $f:X\to Y$ רציפה אם ורק אם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X לכל $U\in B$.
ב) יהי X מ"ט, $A\subseteq X$ ו- B בסיס מקומי בנקודה $x\in X$. הוכיחו ש $x\in cl(A)$ אם ורק אם לכל $U\in B$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$.