אינפי 4 – מושגים בסיסיים בתבניות דיפרנציאליות (מסדר-1) ושדות וקטוריים

<u>תבנית דיפרנציאלית מסדר 1</u> (***differential form of degree 1***) על קבוצה $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ היא פונקציה , $\omega\colon \mathrm{D} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R})$, (כלומר לכל וקטור $\underline{x}$ שב- D , $\omega(\underline{x})$ היא העתקה לינארית מ $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ל- $\mathbb{R}$).

מכיוון שכל העתקה לינארית A מהמרחב הנ"ל לממשיים היא מהצורה :

$\mathrm{A}v = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n$, עבור איזה שהוא וקטור $\underline{a} = (a_1, \dots, a_{\mathrm{n}})$ (אלגברה לינארית מכה שנית ...) , אז לתבנית הדיפרנציאלית כמו שהגדרנו יש הצגה :

$\boldsymbol{\omega}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{w_1}(\underline{\mathbf{x}})\mathbf{dx_1} + \cdots + \mathbf{w_n}(\underline{\mathbf{x}})\mathbf{dx_n}$, כאשר $dx_k(v_1, \dots, v_n) = v_k$, לכל $1 \leq k \leq n$ (כלומר העתקות אלו הן העתקות לינאריות מסוג היטל לרכיב המתאים).

<u>דוגמא מתבקשת שראינו</u> : אם $f\colon U \to \mathbb{R}$ פונקציה שמוגדרת על קבוצה פתוחה $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, דיפרנציאבילית (במובן של אינפי 3) , אז הדיפרנציאל שלה בנקודה x, df_x ,הוא העתקה לינארית שמוגדרת על ידי : $\boldsymbol{df_x(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(v) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(v)}$, לכל וקטור $v \in \mathbb{R}^n$, והעתקות ההיטל הנ"ל ! .

<u>דוגמא נוספת :</u> אם מראש הפונקציה שלנו $f\colon U \to \mathbb{R}$ היא לינארית , אז יש לה הצגה כ-

$f(v) = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n$ עבור וקטור מקדמים מתאים כאמור , ואז לדיפרנציאל שלה בנקודה כלשהיא $\underline{x}$, תהיה הצורה :

$$\boldsymbol{df_x(v) = a_1 dx_1(v) + \cdots + a_n dx_n(v) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n}$$

> תבנית דיפרנציאלית ω נקראת **<u>מדוייקת</u>** אם יש פונקציה f כך ש $\omega = df$ (כלומר שהיא דיפרנציאל של איזושהיא פונקציה).

> תבנית דיפרנציאלית $\omega(\underline{x}) = w_1(\underline{x})dx_1 + \cdots + w_n(\underline{x})dx_n$, היא C^p אם הפונקציות w_k הן פונקציות C^p (כלומר בעלות נגזרות חלקיות מסדר p רציפות) , לכל $1 \leq k \leq n$.

>תבנית דיפרנציאלית $\omega(\underline{x}) = w_1(\underline{x})dx_1 + \cdots + w_n(\underline{x})dx_n$, שהיא C^1 , ומקיימת את התנאי : $i, j = 1, \dots, n$, $\frac{\partial \mathrm{w_i}}{\partial \mathrm{x_j}} = \frac{\partial \mathrm{w_j}}{\partial \mathrm{x_i}}$, נקראת **<u>סגורה</u>** .

מינוחים אחרים בהקשר שלנו הם אלו :

> עבור קבוצה $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, **שדה (וקטורי) ב – D** היא פונקצייה וקטורית: $f = (f_1, \dots, f_n)\colon \mathrm{D} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

> שדה וקטורי כנ"ל הוא **משמר** (*conservative*) אם קיימת פונקציה <u>ממשית</u> $\mathrm{F}\colon \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, כך ש: $\nabla \mathrm{F} = f$, ואז הפונקציה F נקראת **פוטנציאל של f ב- D** .

*שימו לב לקשר בין המושגים – כאשר פונקציה וקטורית $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n})$ מתאימה לתבנית הדיפרנציאלית: $\boldsymbol{\omega}(\underline{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{f_1}(\underline{\mathbf{x}})\mathbf{dx_1} + \cdots + \boldsymbol{f}_{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}})\mathbf{dx_n}$, ונאמר שתבנית זו מדוייקת כאשר הפונקציה הוקטורית המתאימה $\boldsymbol{f}$ היא שדה משמר. התבנית הזו היא סגורה כאשר הנגזרות החלקיות בהגדרת תבנית "סגורה" הן ביחס לפונקציות הקואורדינטות f_i.