תרגול 2-אושרית

לכסינות מטריצות ולכסינות הע"ל ומשפט קיילי המילטון

משפט: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ע"ע שונים של A

ו- $v_1, \ldots, v_m$ ו"ע שמתאימים לע"ע $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ בהתאמה

אזי $\{v_1, \ldots, v_m\}$ בת"ל.

במילים פשוטות : ו"ע ששייכים לע"ע שונים בת"ל

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

שלב 1: מציאת פ"א וע"ע

$$|A - \lambda I| = \ldots = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_2 = 4$$

חישובים עליכם ☺

שלב 2: נמצא ו"ע:

נמצא ו"ע: עבור $\lambda_1 = 1$:

$$(A-\lambda I)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3-1 & 0 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} z = t \\ y = -t \\ x = s \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1 = 1$ הוא $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

עבור $\lambda_2 = 4$: נקבל ... $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ בסיס למרחב העצמי.

שלישי חינם(3 וקטורים+ בת"ל לפי המשפט למעלה

הערה:

אם v_1, v_2 ו"ע של אותו ע"ע λ, אז גם כל צ"ל שלהם יהיה ו"ע של λ כי: נראה: $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = A\alpha v_1 + A\beta v_2 = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2$$
$$= \lambda\alpha v_1 + \lambda\beta v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

לכסינות:

הגדרה: מטריצה נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית

דוגמא: מטריצת היחידה היא לכסינה(דומה לאלכסונית, לעצמה)מי המטריצה המלכסנת שלה?

משפט: A לכסינה אממ יש לה בסיס של ו"ע אממ הפ"א מלל + לכל ע"ע רא"=רג"

מתפרק לגורמים ליניאריים

תזכורת: דמיון מטריצות
מטריצות **A** ו**B** נקראות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה **P** כך ש
$P^{-1}AP = B$

דוג': $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$ מצא האם A ניתנת ללכסון ואם כן מהי האלכסונית הדומה לה?

פתרון:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)-3 =$$

$$= 8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2-3 = \lambda^2-6\lambda+5 = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=5$$

נשים לב כי פ"א מל"ל שונים ולכן לכסינה

הערות חשובות:

1.אם מטריצה לכסינה הצורה האלכסונית שהיא דומה לי היא מטריצה אלכסונית עם ע"ע על האלכסון

2. המטריצה המלכסנת **P** היא לשים את הו"ע של הע"ע שעל אלכסון המטריצה האלכסונית בעמודות לפי הסדר

המשך דוגמא משקופית קודמת: נמצא את **P** ואת **D**

שלב 1: נמצא ו"ע

עבור $\lambda_2=5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-5 & 3 & 0 \\ 1 & 4-5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$y=t$

$x=t$

$$\to v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_1=1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-1 & 3 & 0 \\ 1 & 4-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$y=t \to x=-3t$$

$$\to v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שלב 2: נשים בעמודות למציאת P

ולכן

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שלב 3: נמצא את D

ולכן נקבל

D=

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

תרגיל:

דוג: (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?

פתרון:

$$p_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1$$

מעל $\mathbb{R}$: הפ"א לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$ ולכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

מעל $\mathbb{C}$: $\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$

כ"א הפ"א מתפרק לגורמים לינאריים.

וכיוון שלכל ע"ע הר"א = 1 אז גם הר"ג = 1 ← ע"פ משפט הלכסון

A לכסינה

תרגיל:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קבעו האם לכסינה?

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3 \Leftarrow \lambda=0$$

אכן מתפרק לגורמים לינאריים

נמצא ו"ע:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}z=0\\y=0\\x=t\end{array} \Rightarrow V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ הריבוי האלגברי $=3$

הריבוי הגיאומטרי $=1$

$\neq$

ולכן A לא לכסינה.

הערה:

[המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום יש פיתרון מעל $\mathbb{C}$.]

ולכן כל פולינום מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$.

$\Leftarrow$ ולכן: מעל $\mathbb{C}$ כדי ש- A תהיה לכסינה מספיק לדרוש שכל

ע"ע הר"א = הר"ג.

נתרגם לעולם ההעתקות:

. תרגום המושגים והמשפטים לאופרטורים ליניאריים $T:V\to V$:

(א) הגדרת ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור ליניארי. ($Tv=\lambda v$,$\vec{0}\neq v\in V$.)

(ב) λ, v וקטור עצמי וערך עצמי מתאימים של T $\Longleftrightarrow$ $[v]$,λ וקטור עצמי וערך עצמי מתאימים של $[T]$.

מטריצה מייצגת של ההע"ל

1. תרגום לאופרטורים ליניאריים $T : V \to V$:

(א) T **לכסין** אם יש בסיס B כך שהמטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

(ב) המטריצה $[T]_B$ אלכסונית $\Longleftrightarrow$ אברי הבסיס B הם וקטורים עצמיים של T.

(ג) מסקנה: T לכסין $\Longleftrightarrow$ יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים שלו.

(ד) **המרחב העצמי** $V_\lambda = V_\lambda(T) := \{v \in V \ : \ Tv = \lambda v\}$.

מרחב שבו כל הוקטורים הם ו"ע

דוגמא:

נגדיר $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת

$$\begin{aligned} T(1) &= -2 \\ T(x) &= 1 + x^2 \\ T(x^2) &= 1 + 2x - x^2 \end{aligned}$$

קל לראות כי מינוס 2 הוא ע"ע והו"ע הוא
$x - x^2$

אזי מתקיים כי

$$T(x - x^2) = -2x + 2x^2 = -2(x - x^2)$$

כיצד נמצא וקטור עצמי וערך עצמי להעתקה ליניארית?

תזכורת

עבור העתקה ליניארית $T:V\to V$ קיימת מטריצה $[T]$ שנקראת ההצגה המטריצית של T כך שלכל וקטור $v\in V$ מתקיים $[T][v]=[T(v)]$. (נזכור ש $[v]$ הוא וקטור הקואורדינטות של v ביחס לבסיס הסטנדרטי ו $[T(v)]$ הוא וקטור הקואורדינטות של $T(v)$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.

הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה $[T]$ הם הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של ההעתקה הליניארית $T:V\to V$.

דוגמא:

תרגיל

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

א. מצא את הערכים העצמיים של ההעתקה הליניארית.

ב. לכל ערך עצמי שמצאת בסעיף א מצא את הבסיס למרחב העצמי המתאים לו.

תרגיל

תהא $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

א. מצא את הערכים העצמיים של ההעתקה הליניארית.

ב. לכל ערך עצמי שמצאת בסעיף א מצא את הבסיס למרחב העצמי המתאים לו.

פתרון

א. תחילה נמצא את המטריצה $[T]$. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$T(1,0,0)=(2,0,0)=2\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)+0\cdot(0,0,1)$$
$$T(0,1,0)=(1,1,2)=1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+2\cdot(0,0,1)$$
$$T(0,0,1)=(0,-1,4)=0\cdot(1,0,0)-1\cdot(0,1,0)+4\cdot(0,0,1)$$

ולכן $[T]=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$

נמצא את הערכים העצמיים כפי שלמדנו בשיעור שעבר.

הפולינום האופייני הוא $f_{[T]}=|\lambda I-[T]|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

ב.עבור $\lambda=2$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\{(1,0,0)\}$. עבור $\lambda=3$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\{(1,1,-2)\}$.

לא מפורטים שלבי תהליך המציאה.
שיעורי בית

תרגיל:

תהיי $T: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot A$. מצא את הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים של T.

פתרון:

נמצא תחילה את המטריצה המתאימה להעתקה הליניארית

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

מייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

המשך פתרון:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

פ"א

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} =$$

$$(\lambda+1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2\lambda^2$$

מרחבים עצמיים:

$$V_0 = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$V_{-1} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

הצבת המטריצה בפולינום האופייני שלה מאפסת את הפולינום האופייני

משפט קיילי המילטון: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.
נסמן P_A = הפ"א של A. אז $P_A(A)=0$

דוגמא:

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ אז

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\0&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$P_A(A)=(2I-A)(3I-A)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

שימוש אפשרי:

מציאת המטריצה ההפוכה בעזרת קיילי המילטון:

נתונה A. ונתון: $P_A = x^3-2x^2+x-4$

מהי A^{-1}? (הביעו אותה בעזרת A)

פתרון: עפ"י קיילי המילטון

$$A^3-2A^2+A-4I=0$$

$$\Rightarrow A\underbrace{\left(\frac{A^2-2A+I}{4}\right)}_{"A^{-1}"} = I$$

מעבירים את **I**אגף
מחלקים בארבע
ומוצאים גורם משותף

בהצלחה!!!