(1) 03.11.13
שלמה פוג׳
הרצאה 1

<u>מידה</u> על $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$

<u>מטרה</u> - להרחיב את מושג האורך של קטעים לקבוצות כלליות.

למשל - אורך קטע $[a,b]$: $b-a$

שטח מלבן $\mathbb{R}^2$: ab

נרצה לקחת מידה שמוגדרת על כל קבוצה של קבוצות ולהכליל אותן

דוג׳ למידות: כמה נפט (במתדבים) יש בכל קו של כדוה״א
המידה - אם לוקחים קבוצה, כמה נפט אפשר להוציא מאותה קבוצה

<u>דרישות ממידה</u> ש

1. מוגדרת על אוסף רחב ככל האפשר של קבוצות — אוסף זה U
2. $m(A) \ge 0$ מידה חיובית
3. A, B קבוצות זרות $[A \cap B = \emptyset]$ אז $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
4. אם $A \subset B$ אז $m(A) \le m(B)$

4 נובע מ 3:

$$B = A \cup (B \setminus A)$$
$$\Downarrow$$
$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \ge m(A)$$

<u>מסקנה</u>: בכל מידה $m(\emptyset) = 0$ כי $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ לכן, $m(\emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset)$
$$\Rightarrow m(\emptyset) = 0$$

5. עבור קטעים ישנה גם התכונה שהזזה של קטע יש אותו אורך כמו הקטע המקורי. גם את זה נרצה עבור כל מידה.

<u>הגדרה</u>: בהינתן קבוצה X, נסמן ב$M(X)$ את אוסף כל תת הקבוצות של X

$$M(X) = \{A : A \subset X\}$$

$$X = \{0,1,2\}$$

$$M(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$$

אם בX יש n איברים אז $\#M(X) = 2^n$
לא מניחים באופן כללי ש X סופי.

[יש מרחב. היינו רוצים לכל קבוצה במרחב להגדיר מה המידה שלה]

בהינתן מרחב X היינו רוצים להגדיר לכל $A \subset X$ מה המידה שלו $m(A)$.
מסתבר שלא תמיד ניתן להגדיר מידה על כל הקבוצות ב $M(X)$.

משפט קרתאודורי - לא ניתן להרחיב את האורך של הקטעים למידה על כל $M(\mathbb{R})$.

② 03.11.13

אכן נניח שהמידה m מוגדרת על איזשהו אוסף קבוצות $\Sigma \subset M(X)$.
לדוגמא, המידה m היא כזו מתת קבוצות של X של $\mathbb{R}$ שמוגדרות על הקבוצות ב-Σ. שלוקח פיד חרדגהי

נדרוש מ-Σ שיקיים מספר תכונות (שיוגדרו בהמשך)

חוג - אוסף של קבוצות שסגור לחיתוך והפרש סימטרי

אוסף $\Sigma \subset M(X)$ נקרא <u>חוג</u> אם:

א. $\emptyset \in \Sigma$ (כמו שדרוש שלא יהא ריק)

ב. אם $A,B \in \Sigma$ אז גם $A \cap B \in \Sigma$

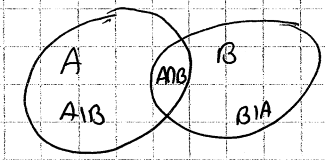
ג. אם $A,B \in \Sigma$ אז גם $A \Delta B \in \Sigma$ הפרש סימטרי

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \left\{ \begin{array}{l} A \text{ כל האיברים שנמצאים ב} \\ \text{או ב} B \text{, לא בשניהם} \end{array} \right\}$$

<u>הגדרה:</u> Σ נקראת <u>אלגברה</u> אם היא חוג וגם $X \in \Sigma$ (אלגברה - חוג שבו גם המרחב (X) שייך לחוג)

<u>טענה:</u> אם Σ <u>חוג</u>, ו-$A,B \in \Sigma$ אז גם $A \cup B \in \Sigma$ וגם $A \setminus B \in \Sigma$ (סגורות תחת איחוד ותחת הפרש)

<u>הוכחה:</u>



$$A \setminus B = A \Delta \underbrace{(A \cap B)}_{\Sigma} \in \Sigma$$

$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\Sigma} \Delta \underbrace{B}_{\Sigma} \in \Sigma$$

<u>טענה:</u> אם $A_1 \cdots A_n \in \Sigma$ אז גם $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$ וגם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה:

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cap A_{n+1}$$ (שלב האינדוקציה)

<u>דוגמאות:</u> 1. $M(X)$ - חוג, אלגברה

2. X אינסופי. Σ - כל התת קבוצות הסופיות של X.
אז Σ הוא חוג אבל לא אלגברה

3. $X = \mathbb{N}$; $\Sigma = \left\{ A \subset \mathbb{N} : \begin{array}{l} |A| < \infty \\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \end{array} \right\}$ הוא חוג ואלגברה $\Sigma \subset M(\mathbb{N})$

קו סופית - המשלים של הקבוצה סופי

נראה חוג: אם $A_1, A_2 \in \Sigma$ אז: א. אם A_1, A_2 סופיות אז גם $|A_1 \cap A_2| < \infty$
וגם $|A_1 \Delta A_2|$ סופי ולכן ב-Σ

ב. אם A_1, A_2 קו-סופיות אז גם $A_1 \cap A_2$ קו-סופי

$$|\mathbb{N} \setminus (A_1 \cap A_2)| \le |\mathbb{N} \setminus A_1| + |\mathbb{N} \setminus A_2| < \infty$$

ג.

(3) 03.11.13
אנליזה פונ'
הרצאה 4

$|A_1 \Delta A_2| < \infty$

$x \in A_1 \Delta A_2 \iff \underbrace{(x \in A_1 \text{ וגם } x \notin A_2)}_{x \in (A_1 \setminus A_2)}$ או $\underbrace{(x \in A_2 \text{ וגם } x \notin A_1)}_{x \in (A_2 \setminus A_1)}$

$[{}^{*} A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)]$

$\Rightarrow |A_1 \Delta A_2| \leq |A_1 \setminus A_2| + |A_2 \setminus A_1| \leq |\mathbb{N} \setminus A_1| + |\mathbb{N} \setminus A_2| < \infty$

גודל האיחוד(*) קטן מסכום הגדלים

2 = $|A_1| < \infty$ (סופית), $|\mathbb{N} \setminus A_2| < \infty$ (קו סופית) (או להפך)

$|A_1 \cap A_2| \leq |A_1| < \infty$

$|\mathbb{N} \setminus (A_1 \Delta A_2)| = |\mathbb{N} \setminus [(A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)]| \leq |\mathbb{N} \setminus (A_2 \setminus A_1)| \leq \underbrace{|\mathbb{N} \setminus A_2|}_{<\infty} + \underbrace{|A_1|}_{<\infty} < \infty$

כדי להראות שזה חוג צריך להוכיח שאם A_1, A_2 בחוג אז גם הפעולות עליהם הם גם בחוג.

• אם לוקחים קבוצות של בחוג זה לא אומר שהפעולות עליהם לא ~~יהיו~~ היו בחוג, לדוגמא -

$\Sigma \neq M(\mathbb{N})$ כי הזוגיים $2\mathbb{N} \notin \Sigma$ [כי $|2\mathbb{N}| = \infty$ וגם המשלים $|2\mathbb{N}+1| = \infty$] ?

אלגברה - אוסף של [illegible] תתי קבוצות של X שסגור לאיחוד ולהפרש סימטרי וגם X שייך לאוסף

4. $\{\emptyset, X\}$ - אלגברה.

5. $X \in \mathbb{R}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{\mathbb{R} \setminus \{1\}\}, \mathbb{R}\}$ - אלגברה

6. $\{\emptyset, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}, X \setminus \{1,2\}, X \setminus \{1\}, X \setminus \{2\}, X\}$ - אלגברה

אנטי דוגמאות -

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ - לא חוג כי לא סגור לאיחוד. למשל $X = \{0,1,2\}$

<u>טענה:</u> אם $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ חוגים ב- $M(X)$ אז גם $\Sigma = \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ חוג

(חיתוך כלשהו של חוגים הוא חוג)

כ"נ לגבי אלגברה.

<u>הוכחה:</u> 1) $\emptyset \in \Sigma$ כי $\forall i \in I$, $\emptyset \in \Sigma_i$ ולכן $\emptyset \in \bigcap_i \Sigma_i$

2) אם $A, B \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ אז $\forall i \in I, A, B \in \Sigma_i$

ולכן $\forall i \in I$ $A \Delta B \in \Sigma_i$, $A \cap B \in \Sigma_i$ (כי Σ_i חוגים)

ולכן סגור לחיתוך והפרש סימטרי

$\Leftarrow$ $A \cap B \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ וגם ~~$A \Delta B$~~ $A \Delta B \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$

$\Leftarrow$ $\Sigma = \bigcap \Sigma_i$ חוג

(4) 03.11.13
תורת המידה
הרצאה 4

אם Σ_i σ-אלגברה $\forall i\in I$

כדי לקבל ש $\bigcap_{i\in I}\Sigma_i$ σ-אלגברה נותר לשים לב ש $X\in\Sigma_i$, $\forall i\in I$ ולכן

$x\in\bigcap_{i\in I}\Sigma_i$, כלומר $x\in\Sigma$

<u>משפט:</u> בהינתן $\Sigma\subset M(X)$ קיים ויחיד חוג $R(\Sigma)$ שמכיל את Σ שהוא מינימלי ביחס להכלה! כלומר לכל חוג R^* $\Sigma\subset R^*$ $R(\Sigma)\subset R^*$.

<u>הוכחה:</u> נתחיל <u>קיום:</u> נגדיר $R(\Sigma)=\bigcap_{\substack{R\subset M(X) \text{ חוג} \\ \Sigma\subset R}} R$ ונראה כי הוא מקיים את הנדרש.

$S=\left\{\Sigma\subset R\subset M(X) : R \text{ חוג}\right\}\neq\emptyset$ כי $M(X)\in S$.

לכן ניתן להגדיר את $R(\Sigma)=\bigcap_{R\in S}R$

$\Sigma\subset R(\Sigma)$ כי $\Sigma\subset R$ לכל $R\in S$

$R(\Sigma)$ חוג לפי הטענה הקודמת (חיתוך של חוגים)

אם $\Sigma\subset R^*\subset M(X)$ חוג אז $R^*\in S$ ולכן $R(\Sigma)=\bigcap_{R\in S}R\subset R^*$ מינימליות

<u>יחידות:</u> נניח ש R_1, R_2 חוגים מינימליים שמכילים את Σ. אז $R_1\subset R_2$ וגם $R_2\subset R_1$, כלומר $R_1=R_2$

החוג $R(\Sigma)$ נקרא החוג שנוצר מ-Σ (או החוג המינימלי של Σ)

הקטעים $\{[a,b]\}_{a,b}$ או (a,b) הם לא חוג כי $[a,b]\cup[c,d]$ הוא לא בהכרח קטע (גם אם זרים)

<u>הגדרה:</u> <u>חוג למחצה:</u> $\Sigma\subset M(X)$ נקראת חוג למחצה

1. $\Sigma\neq\emptyset$
2. אם $A,B\in\Sigma$ אז $A\cap B\in\Sigma$
3. אם $A_1,A\in\Sigma$ ו $A_1\subset A$ אז ניתן לרשום $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו $A_i\in\Sigma$
(והקבוצה הראשונה היא A_1)

(3) שקולה ל $A\setminus A_1=\bigcup_{i=2}^{n}A_i$ כלומר, ההפרש $A\setminus A_1$ ניתן לרשום כאיחוד זר של קבוצות מ-Σ. [בחוג למחצה לא דרוש ש $A\setminus A_1\in\Sigma$]

- לכתיבה $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ קוראים פירוק זר סופי של A

חוג למחצה לא בהכרח סגור תחת איחוד

- טענה (תרגיל): הקטעים $\{[a,b)\}_{a,b\in\mathbb{R}}$ חוג למחצה

(הקטע הריק נחשב גם הוא קטע]

(5) 03.11.13

אנליזה פונ'
הרצאה 4

למה: פירוק סופי זר חלקי של A ניתן להרחבה לפירוק סופי זר של A.

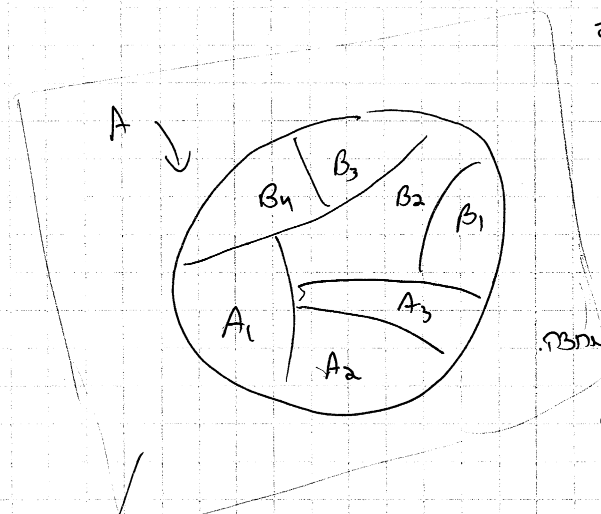
תהיינה $A, A_1, A_2 \dots A_n \in \Sigma$ חוג למחצה כך ש $A_i \cap A_j = \emptyset$ $1 \le i \ne j \le n$

ו $A_i \subset A$ $1 \le i \le n$. אז ישנן $r \in \mathbb{N}$ קבוצות $B_1 \dots B_r$ זרות בזוגות כך ש

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{r} B_i$$

נרצה להראות שבהינתן מס' סופי של קבוצות זרות ניתן להמשיך אותן לכדי פירוק

קבוצה שיש את זה כך שהוספנו את חלק קבוצה (A_1) ועדיין יש שארית שנשאר ניתן לרשום כאיחוד זר



פירוק חלקי - קבוצות שלא מכסות את כל A

הוכחה: באינדוקציה על n

בסיס האינדוקציה $n=1$ - זו בדיוק ההגדרה של חוג למחצה.

$$A \setminus A_1 = \bigcup_{j=1}^{r} B_j$$

כעת נניח שהדבר נכון עבור m, ונוכיח עבור $m+1$:

$A \in \Sigma$
$A_i \in \Sigma$
$B_i \in \Sigma$

$A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1} \subset A$ מהנחת האינדוקציה ניתן לרשום - $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{r} B_j$

נרחיב את A כי m הראשונות מחוברות עם עוד קבוצות

$B_j \in \Sigma$

חיתוך בין A_{m+1} ל B_j

$C_j = B_j \cap A_{m+1}$ $1 \le j \le r$. C_j זרות בזוגות, וזרות גם ל A_i $1 \le i \le m$

1. $B_j \setminus C_j = \bigcup_{k=1} D_{j,k}$ מהגדרת החוג למחצה, כאשר $D_{j,k} \in \Sigma$

קבוצה ב Σ קבוצה ב Σ

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{r} C_j \cup \bigcup_{j=1}\bigcup_{k=1} D_{j,k}$$

A_{m+1} $\bigcup_{j=1}^{r} B_j$ הפירוק של B לשאר חלקי B שמורידים את החיתוך עם A

כי $B_j = C_j \cup \bigcup D_{j,k}$ וזהו איחוד זר כי ה B_j זרות בזוגות

A_{m+1} זר לכל שאר ה-A_i, הוא נמצא ב A, ולכן נמצא ב $\bigcup_{j=1}^{r} B_j$

2. $A_{m+1} = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$ ~~כי $C_j \subset A_{m+1}$ לכל j ולכן $C_j \subset A_{m+1}$.~~

$$A_{m+1} \subset \bigcup B_j$$

$$A_{m+1} \cap \left(\bigcup B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{r}\left(A_{m+1} \cap B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{r} C_j$$

(6) 03.11.13

[illegible]
הרצאה

<u>למה!</u> כל משפחה סופית $A_1, A_2, \dots A_n$ של קבוצות ב-Σ - חוג למחצה,
ניתנת לפירוק זר סופית.

כלומר יש משפחה סופית $B_1 \dots B_k$ של קבוצות זרות ב-Σ כך שכל A_i
ניתן לרשום כ- $A_i = \bigcup_{j=1}^{k} B_{ij}$

לא נוכיח במלואו, אבל נראה אינדוקציה רק ל- $k=2$:

$$A_1 \setminus (A_1 \cap A_2) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

ד

$$\{C_i, D_j, A_1 \cap A_2\}$$

$$A_2 \setminus (A_1 \cap A_2) = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$$

<u>משפט:</u> אם Σ חוג למחצה אז $\{\underset{\hat{X}}{A} : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i ,\ A_i \in \Sigma\} = R(\Sigma)$

החוג המינימלי
שנוצר מ-Σ

כלומר החוג הנוצר מ-Σ הוא בדיוק אוסף כל תתי קבוצות של X שניתנות לפירוק
זר ב-Σ. כלומר כל האיחודים הסופיים הזרים של קבוצות מ-Σ

<u>הוכחה:</u> ברור שכל חוג שמכיל את Σ חייב להכיל כל איחוד סופי זר של קבוצות מ-Σ,
כי חוג סגור תחת איחודים סופיים.
לכן $R(\Sigma) \supset \{\dots \bigcup_{i=1}^{n} A_i\}$

כדי להוכיח שוויון, די להוכיח ש-S חוג, כלומר סגור תחת חיתוך והפרש סימטרי.

<u>חיתוך:</u> נניח ש- $A, B \in S$ כלומר $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$

נרשום:

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\left(\bigcup A_i\right) \cap \left(\bigcup B_j\right)$$

נשים לב שהקבוצות $C_{ij} = A_i \cap B_j$ זרות בזוגות

אם $i_1 \neq i_2$ אז $C_{i_1 j_1} \subset A_{i_1}$, $C_{i_2 j_2} \subset A_{i_2}$ ולכן הן זרות

אם $i_1 = i_2$ אז $j_1 \neq j_2$ ואז $C_{i_1 j_1} \subset B_{j_1}$! $C_{i_2 j_2} \subset B_{j_2}$ ולכן הן זרות