

פתרון

1. הוכיחו: $A \in$ –טרנזיטיבית אמ"ם $UA \subseteq A$.
 פתרון: \Leftarrow נניח ש $A \in$ –טרנזיטיבית. יהי $y \in UA$. כלומר, קיים $x \in A$ כך ש $y \in x$.
 $A \in$ –טרנזיטיבית, ולכן $y \in A$. כלומר, $UA \subseteq A$.
 \Rightarrow נניח ש $UA \subseteq A$. יהי $y \in x \in A$. ולכן $x \in UA$. נובע מכך ש $y \in UA$.
 אבל, $UA \subseteq A$ ולכן $y \in A$. כלומר, $A \in$ –טרנזיטיבית.
2. יהיו $\{A_i\}$ קבוצות \in –טרנזיטיביות. הוכיחו: $\bigcap A_i$ ו $\bigcup A_i$ הן קבוצות \in –טרנזיטיביות.
 פתרון: $\bigcap A_i$: יהי $y \in x \in \bigcap A_i$. מהגדרת חיתוך, לכל i , $x \in A_i$. כל הקבוצות
 טרנזיטיביות, ולכן לכל i , $y \in A_i$. $\Leftarrow y \in \bigcap A_i$.
 $\bigcup A_i$: יהי $y \in x \in \bigcup A_i$. מהגדרת איחוד, קיים i כך ש $x \in A_i$. טרנזיטיבית ולכן
 $y \in A_i$. $\Leftarrow y \in \bigcup A_i$.
3. תהי A קבוצה. נסמן: $A_0 = A$, $A_n = A_{n-1} \cup (UA_{n-1})$, $tc(A) = \bigcup A_n$.
 הוכיחו: $tc(A)$ היא הקבוצה \in –טרנזיטיבית המינימלית שמכילה את A .
 פתרון: ראשית, נוכיח שהיא מכילה את A .
 $A = A_0 \subseteq UA_n$
 שנית, נוכיח שהקבוצה \in –טרנזיטיבית.
 יהי $y \in x \in tc(A)$. $\exists n : x \in A_n \Leftarrow x \in tc(A)$. $y \in UA_n \Leftarrow y \in A_{n+1} \Leftarrow y \in UA_n$
 $\Leftarrow x \in A_n \Leftarrow x \in UA_n$.
 כעת, נוכיח ש $tc(A)$ הוא הראשון שמקיים זאת.
 תהי $B \in$ –טרנזיטיבית כך ש $A \subseteq B$. נוכיח ש $tc(A) \subseteq B$. נוכיח את זה
 באינדוקציה.
 עבור $n = 0$: נתון ש $A \subseteq B$.
 נניח ש $A_n \subseteq B$. נוכיח ש $A_{n+1} \subseteq B$.
 $B \in$ –טרנזיטיבית, ולכן $UA_n \subseteq B$. אזי $A_{n+1} = A_n \cup (UA_n) \subseteq B$.
 4. תנו דוגמא לקבוצה \in –טרנזיטיבית שאינה סודר.
 פתרון: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$. קל לראות שהיא \in –טרנזיטיבית. היא אינה סודר כי $\emptyset \in$ לא
 מהווה עבורה יחס סדר בכלל. הוא לא טרנזיטיבי: $\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, אבל $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.
5. יהיו α, β סודרים. הוכיחו: $s(\alpha) < s(\beta) \iff \alpha < \beta$.
 פתרון: \implies יהיו $\alpha < \beta$. הוכחנו בתרגול ש $s(\alpha)$ הוא הסודר הראשון שגדול מ α , לכן
 $s(\alpha) \leq \beta$. כמו כן, $s(\beta)$ גדול ממש מ β ולכן $s(\alpha) < s(\beta)$.
 לכן, $s(\alpha) < s(\beta)$.
 \implies נניח ש $s(\alpha) < s(\beta)$. $s(\alpha) \in s(\beta)$. $\alpha \in s(\alpha) \in s(\beta)$. לכן $\alpha = \beta$ או $\alpha < \beta$.
 אם $\alpha = \beta$ אז $s(\alpha) = s(\beta)$, בסתירה. לכן, $\alpha < \beta$.