תרגול 5 – אינפי 2 למדעי המחשב

$$\sin 2x = 2\sin x\,\cos x,\quad 2\sin^2 x = 1-\cos 2x,\quad 2\cos^2 x = 1+\cos 2x$$

דוגמא 19: חשב את $\int \sin^4 x\,\cos^2 x\,dx$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,\cos^2 x\,dx &= \int \sin^2 x\,\cos^2 x\,\sin^2 x\,dx \\
&= \int (\sin x\,\cos x)^2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\
&= \int \frac{1}{8}\sin^2 2x(1-\cos 2x)dx \\
&= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,\cos 2x\,dx \\
&= \tfrac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx - \tfrac{\sin^3 2x}{48} + C \\
&= \tfrac{x}{16} - \tfrac{1}{64}\sin 4x - \tfrac{\sin^3 2x}{48} + C
\end{aligned}$$

4. טיפול בפונקציות רציונליות עם שורשיםיכול להעשות בעזרת פונקציות טריגונומטריות:

- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2-x^2}$ נציב $x=a\cos(t)$ או $x=a\sin(t)$.
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{x^2-a^2}$ נציב $x=\frac{a}{\cos(t)}$ או $x=\frac{a}{\sin(t)}$.
- אם מופיע הביטוי $\sqrt{a^2+x^2}$ נציב $x=a\tan(t)$.

דוגמה 3.5. נחשב

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} &= \left[x=\frac{1}{\cos(t)}, dx=\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}\right] = \int \frac{\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}} \\
&= \int \frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}} \underset{*}{=} \int \sqrt{\cos^2(t)}dt \underset{**}{=} \int \cos(t)dt \\
&= \sin(t)+c = \sqrt{1-\cos^2(t)}+c = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c
\end{aligned}$$

*: הנחנו ש-$\sin(t)\geq 0$ כי $t=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\in[0,\pi]$.

**: הנחנו ש-$\cos(t)>0$. אם היינו מניחים ש-$\cos(t)<0$ היינו מקבלים

$$-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+c = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}+c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש-$\sqrt{x^2}=-x$ כי $x=\frac{1}{\cos(t)}<0$.

אפשר גם לעבוד רק עם x>0 ובסוף לוודא ע"י גזירה שהפונקציה הקדומה שקיבלנו טובה גם ל-x<0

3.6 הצבה אוניברסלית

ההצבה האוניברסלית היא $t = \tan(\frac{x}{2})$ והיא מאפשרת להביע את $\sin(x)$ ו-$\cos(x)$ כפונקציה רציונלית של t ולחשב פונקציות קדומות עבור פונקציות רציונליות של פונקציות טריגונומטריות:

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\cos^2(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$
$$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = 2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

היכן ש-t מוגדר, כלומר $x \neq \pi + 2\pi n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$. לדוגמה:

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t}$$
$$= \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

3.7 הצבת אוילר (לטיפול בשורשים)

שיטה אחרת לטיפול בשורשים היא הצבת אוילר, שבה ההצבה שונה אם הפולינום פריק או לא. שיטה זו טובה למציאת $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

טענה 3.11. נניח כי פולינום (ממעלה 2) פריק מעל הממשיים והוא מן הצורה $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. הצבת אוילר במקרה זה היא $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$

כיוון שלמדו אינטגרציה של פונקציה רציונלית בתרגול הקודם, אפשר לחסוך זמן ולפרט את החישוב עד שמגיעים לאינטגרל של פונקציה רציונלית, ואז לרשום מיד את התשובה הסופית.

דוגמה 3.12. נחשב את $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$. הפולינום בשורש פריק ולכן נציב $\sqrt{x^2+3x-4} = t(x+4)$. מכאן

$$(x+4)(x-1) = x^2+3x-4 = t^2(x+4)^2$$
$$x-1 = t^2(x+4)$$
$$x(1-t^2) = 1+4t^2$$

$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{8t(1-t^2)+2t(1+4t^2)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{1}{t(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4)}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{1}{t(\frac{5}{1-t^2})}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$
$$= \int \frac{1}{5t}\frac{10t}{(1-t^2)}dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}dt = 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt$$
$$= 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$
$$= \left[t = \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}\right] = \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + c$$

טענה 3.13. אם הפולינום ax^2+bx+c אי־פריק, ישנן שתי אפשרויות:

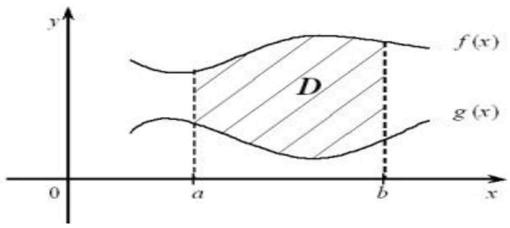
- אם $a>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$ ונקבל $x=\frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a}-b}$.
- אם $c>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ ונקבל $x=\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$. שימו לב שבכל מקרה צריך $a>0$ כדי שהשורש יהיה מוגדר, אך לפעמים הצבה זו מובילה לחישוב יותר פשוט.

יישומים של האינטגרל המסוים – שטח, אורך עקום, ערך ממוצע

השטח החסום ע״י גרפים של מספר פונקציות

אם תחום D חסום מלמעלה ע"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ ומלמטה ע"י הגרף של הפונקציה $g(x)$, כאשר x נמצא בקטע $[a,b]$, אז השטח של התחום D ניתן ע"י:

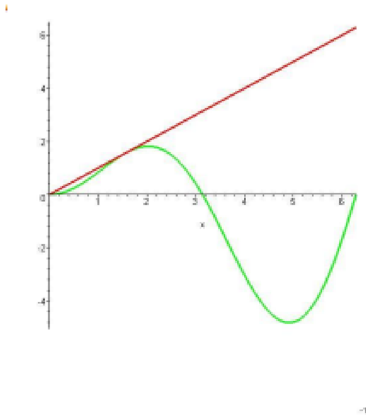
$$S(D)=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x$$



3. מצאו את שטח התחום הכלוא בין העקומות :

$y=x\sin x$ ל- $y=x$, כאשר $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

פתרון:



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx$$

$$\begin{Bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=1-\sin x & v=x+\cos x \end{Bmatrix}$$

$$=x(x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\left(\frac{x^2}{2}+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

אורך הגרף של פונקציה:

האורך, ℓ, של הגרף של הפונקציה $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$ ניתן ע"י הנוסחה:

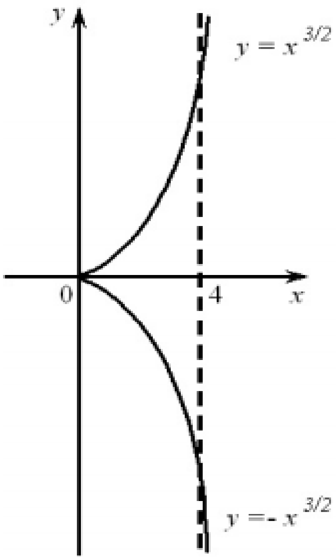
$$\ell=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

תרגיל 11

חשב את אורך העקום הנתון ע"י: $0\le x\le 4$, $y^2=x^3$.

פתרון:

לעקום שלנו יש שני חלקים סימטריים מעל ומתחת לציר x : $y=\pm x^{\frac{3}{2}}$.



בגלל הסימטריה האורך הכולל שווה לפעמיים אורך החלק העליון. לכן:

$$\begin{aligned}\ell &= 2\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^4\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{16}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

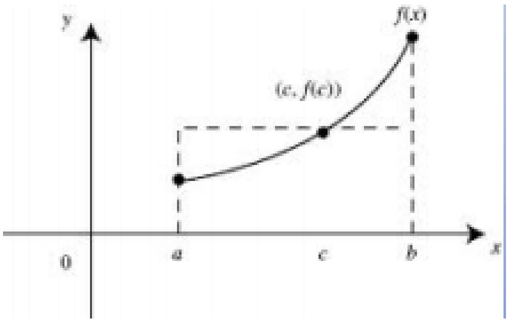
ערך ממוצע של פונקציה

משפט

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אזי קיימת נקודה c בקטע כך ש־

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ נקרא **הממוצע של** $f(x)$ **בקטע** $[a,b]$.



Example 2 Determine the number *c* that satisfies the Mean Value Theorem for Integrals for the function $f(x) = x^2 + 3x + 2$ on the interval [1,4]

Solution
First let's notice that the function is a polynomial and so is continuous on the given interval. This means that we can use the Mean Value Theorem. So, let's do that.

$$\int_1^4 x^2 + 3x + 2\,dx = \left(c^2 + 3c + 2\right)(4-1)$$
$$\left.\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\right|_1^4 = 3\left(c^2 + 3c + 2\right)$$
$$\frac{99}{2} = 3c^2 + 9c + 6$$
$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

This is a quadratic equation that we can solve. Using the quadratic formula we get the following two solutions,

$$c = \frac{-3 + \sqrt{67}}{2} = 2.593$$
$$c = \frac{-3 - \sqrt{67}}{2} = -5.593$$

Clearly the second number is not in the interval and so that isn't the one that we're after.