תרגול 4 – חדוו"א 1 לביולוגיה חישובית

המספר e

שימוש בגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. (ראיתם בהרצאה)

דוגמא

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-2}+\frac{3}{n-2}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n-2)/3}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(n-2)/3}\right)^{\frac{n-2}{3}}\right)^{3\frac{(3n+2)}{n-2}} = e^9$$

הערה

לעיתים ניתן להראות שהגבול קיים גם אם לא ניתן למצוא את הגבול עצמו.

משפט

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

דוגמא

נוכיח שהסדרה $a_n = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

הסדרה מונוטונית עולה מכיוון שכל איבר מתקבל ע"י הוספת מספר חיובי לאיבר הקודם לו.

נשאר להוכיח שהסדרה חסומה.

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} \le 1-\frac{1}{n} < 1$ הראינו שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

כלל הסנדביץ'

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ואם קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $a_n \le b_n \le c_n$ אזי גם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L.

תרגיל

חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

פתרון

נשים לב ש

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

ולכן $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ נסמן

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

מכיוון שלכל n טבעי מתקיים $a_n \le b_n \le c_n$ ומכיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$ נקבל שגבול הסדרה הוא 1.

<u>קריטריון קושי להתכנסות סדרות</u>

סדרת מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ **<u>ולכל</u>** $p \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

<u>הערה</u>

שימו לב לחשיבות המילה לכל.

אם במקום המילה "לכל" שהדגשתי הייתה רשומה המילה "קיים" הקריטריון לא הייה נכון.

ראיתם בהרצאה שהסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ מתבדרת.

אבל כן מתקיים

לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

מדוע?

מכיוון שהטענה נכונה עבור $p = 1$ ולא לכל $p \in \mathbb{N}$.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי הסדרה $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i + i}$ מתכנסת.

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{1}{4^{n+1}+n+1} + \frac{1}{4^{n+2}+n+2} + \frac{1}{4^{n+3}+n+3} + \ldots + \frac{1}{4^{n+p}+n+p} \right|$$

$$\le \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \ldots + \frac{1}{4^{n+p}} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^p}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3\cdot 4^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^p}\right) \le \frac{1}{4^n}$$

ועבור $n_0 = \lceil -\log_4 \varepsilon \rceil$

$$\frac{1}{4^n} \le \frac{1}{4^{n_0}} = \frac{1}{4^{\lceil -\log_4 \varepsilon \rceil}} \le \varepsilon.$$

<u>הערה</u>

ראיתם בהרצאה שהסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ מתבדרת – ראיתם ש $a_{2n} - a_n > \frac{1}{2}$.

<u>תתי סדרות</u>

לפני שנרשום את ההגדרה הפורמלית לתת סדרה ניתן מספר דוגמאות כדי להסביר את הרעיון של ההגדרה והשימושים שלה.

<u>דוגמאות</u>

1. נתונה הסדרה ההנדסית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$ ניקח למשל את כל איברי הסדרה שנמצאים במקומות הזוגיים $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots,$ ונסמנם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. הסדרה הנ"ל היא תת סדרה של הסדרה הנתונה

כאשר האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא האיבר השני בסדרה הנתונה נסמן: $n_1=2$ ז"א $a_{n_1}=b_1$.
באופן כללי נאמר שלכל k טבעי $a_{n_k}=b_k$.

2. נתונה הסדרה $1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1,\dots$ (נניח שהחוקיות נשמרת) נתבונן בשתי תתי סדרות – סדרה אחת היא הסדרה הקבועה 1, סדרה שנייה היא הסדרה הקבועה 1-. קיבלנו שתי תתי סדרות המתכנסות לגבולים שונים במקרה כזה נוכל לאמר שהסדרה לא מתכנסת. נשים לב שהאיבר השלישי בסדרה הקבועה 1 הוא האיבר הרביעי בסדרה המקורית ולכן $n_3=4$.

<u>הגדרה</u>

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה, ותהיי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים. אם לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $b_k=a_{n_k}$, אז נקבל סדרה חדשה $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ אשר תקרא תת סדרה של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, בד"כ נסמן $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

<u>דוגמא</u>

אם $a_n=\dfrac{1}{n}$ ו $b_k=\dfrac{1}{k^2}$ אזי $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ הינה תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>משפט</u>

אם לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימות שתי תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת.

<u>תרגיל</u>

בדוק את ההתכנסות של הסדרה $a_n=\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

<u>פתרון</u>

הסדרה $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס והסדרה $\{a_{4k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל 1, ולכן הסדרה מתבדרת.

<u>הגדרה - משפט</u>

לכל סדרה חסומה קיים הגבול החלקי הקטן ביותר וקיים הגבול החלקי הגדול ביותר. הגבול החלקי הגדול ביותר של סדרה נתונה נקרא הגבול העליון של הסדרה, והגבול החלקי הקטן ביותר של הסדרה נקרא הגבול התחתון של הסדרה. הגבול העליון מסומן ע"י $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ והגבול התחתון מסומן ע"י $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n$.

<u>דוגמא</u>

נתונה הסדרה $\left\{3+(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הגבול העליון של הסדרה הוא 4 והתחתון הוא 2.

<u>הגדרת סדרה בעזרת נוסחת נסיגה</u>

הגדרת סדרה באמצעות כלל נסיגה היא סדרה המיוצגת באמצעות נוסחה שמראה כיצד מתקבל כל איבר בסדרה (החל מהאיבר השני) בעזרת האיבר שקודם לו.

בד"כ נתון האיבר הראשון בסדרה הנקרא תנאי התחלתי. ללא האיבר הראשון לא ניתן לקבל את איברי הסדרה.

<u>דוגמא</u>

סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1}=2a_n-n, a_1=6$.

$$a_{1+1}=2a_1-1=2\cdot 6-1=11 \Rightarrow a_2=11$$

$$a_{2+1}=2a_2-1=2\cdot 11-1=21 \Rightarrow a_3=21$$

בצורה כזאת ניתן לקבל את כל איברי הסדרה.

<u>הערה</u>

כדי לחשב גבול סדרה הנתונה באמצעות נוסחת נסיגה נוכיח תחילה שיש לסדרה גבול ונשתמש בעובדה שאם קיים הגבול אז $L=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$.

<u>תרגיל</u>

נגדיר סדרה ע"י רקורסיה: $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$.

הוכח כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשב את גבולה.

<u>פתרון</u>

נוכיח כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ומונוטונית.

נוכיח תחילה שהסדרה חסומה.

נשתמש באי שוויון הממוצעים. לכל n מספרים ממשיים חיוביים $x_1, x_2, ..., x_n$ מתקיים:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \le \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

$a_{n+1}=\frac{a_n+\frac{3}{a_n}}{2} \ge \sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\sqrt{3}$. קיבלנו כי $a_n \ge \sqrt{3}$, לכל n, ולכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה.

נראה כי הסדרה מונוטונית יורדת.

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right) \le \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n+\sqrt{3}\right) \le \frac{1}{2}\left(a_n+a_n\right)=a_n.$$

לכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן מתכנסת.

נחשב את הגבול שלה. נקרא לגבול L.

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n+\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(L+\frac{3}{L}\right).$$

נפתור את המשוואה $L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{3}{L}\right)$ ונקבל $L=\sqrt{3}$.