

חשבון אינפיניטסימלי 1 – 88-132 – תש"פ

תרגיל 1 – חזרה על חומר של תיכון

לא להגשה

1. הוכיחו באינדוקציה כי כל אחד מהשוויונות הבאים נכון לכל מספר טבעי  $n$ , וכן רישמו מחדש את השוויונות ע"י סימון הסכימה  $\Sigma$ :

א.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. מיצאו את המספר הטבעי הראשון עבורו מתקיים אי-השוויון הבא והוכיחו באינדוקציה שהחל ממנו הוא אכן מתקיים:

$$3^n > 2^n + 200$$

3. מיצאו את השגיאה ב"הוכחה" הבאה.

טענה: לכל הסוסים בעולם יש את אותו הצבע.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על מספר הסוסים  $n$ .

מקרה הבסיס ( $n = 1$ ): ברור שבקבוצה של סוס אחד, לכל הסוסים באותה הקבוצה יש את אותו הצבע.

שלב האינדוקציה: נניח שכבר הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל  $n = k$  סוסים ונוכיח על סמך כך כי היא נכונה עבור כל קבוצה של  $n = k + 1$  סוסים.

נסתכל על קבוצת  $k + 1$  הסוסים. מתוכם,  $k$  הראשונים הם בהכרח באותו צבע, לפי הנחת האינדוקציה.

באותו האופן, גם  $k$  האחרונים ביניהם הם בהכרח באותו צבע, שוב לפי הנחת האינדוקציה.

לכן, ברור כי גם לכל  $k + 1$  הסוסים יש את אותו הצבע.

הראנו כי הטענה נכונה עבור  $n = 1$  והראנו שאם היא נכונה עבור  $n = k$  היא נכונה גם עבור  $n = k + 1$ , לכן לפי אקסיומת האינדוקציה הראינו כי הטענה נכונה לכל המספרים הטבעיים, מש"ל.

4. פיתחו את הסוגריים לפי נוסחת הבינום של ניוטון:

א.  $(a - b)^5$

ב.  $(x - y^2)^6$

ג.  $(x^2 + 3)^6$

ד.  $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

ה.  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$

5. מהו המקדם של  $a^7$  בביטוי  $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$  ?

6. פשטו את הביטויים הבאים ככל הניתן:

$$\frac{32x^2 - 2}{(1 - 4x)(2x - 7)}$$

$$\frac{x^2 y^2 - 1}{xy + 1}$$

$$\frac{5a^2 - 16a + 12}{5a^3 - a^2 - 6a}$$

$$\frac{n^4 - m^4}{n^2 - 3nm + 2m^2} \cdot \frac{n^2 - nm - 2m^2}{n^2 + m^2}$$

$$\left( \frac{-5x^2 - 4x - 2}{9x^2 - 1} + \frac{x - 1}{3x + 1} + \frac{2x + 1}{3x - 1} \right) \left( \frac{36x^2 + 24x + 4}{4x^2 + 13x - 12} \right)$$

7. מיצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר (\*) של כל אחת מקבוצות המספרים הבאות:

א.  $\{30, 36, 78, 114\}$

ב.  $\mathbb{N}$

ג.  $\{n(n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(\*) המחלק המשותף הגדול ביותר של קבוצת מספרים טבעיים הוא המספר הטבעי אשר מחלק את כולם, והוא הגדול ביותר מבין כל המספרים בעלי תכונה זו.

8. מיצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של

$$\{n(n + 1)(2n + 1)(3n + 1)(4n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$