מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ו

מרצה: ארז שיינר. תאריך: 10/09/15

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ 0 & -1<x\le 1 \\ x & x\le -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי $x\le\sqrt{2}$ מתקיים אי השוויון $f(f(x))\le|x-1|$

הערה: אם $x>\sqrt{2}$ אזי

$$f\big(f(x)\big)=f(x^2-1)$$

כיוון ש $x>\sqrt{2}$ נובע כי $x^2-1>1$ ולכן

$$f\big(f(x)\big)=f(x^2-1)=(x^2-1)^2-1$$

מקבלים כאן פולינום ממעלה רביעית, ואי אפשר בכלים שלנו לפתור את זה בתחום זה.

מקרה ראשון: $1<x\le\sqrt{2}$

במקרה זה $f(x)=x^2-1$

וכן $0<x^2-1\le 1$ ולכן

$$f\big(f(x)\big)=f(x^2-1)=0$$

אי השיוויון נראה כך:

$$0\le|x-1|$$

וזה מתקיים בכל התחום.

מקרה שני: $-1<x\le 1$

במקרה זה

$$f\big(f(x)\big)=f(0)=0$$

ובאופן דומה אי השיוויון נראה כך

$$0\le|x-1|$$

ולכן מתקיים בכל התחום.

תחום שלישי $x \le -1$

$$f\left(f(x)\right) = f(x) = f(x)$$

אי השיוויון נראה כך

$$x \le |x-1|$$

בתחום זה $x - 1 < 0$ ולכן אי השיוויון נראה כך

$$x \le 1 - x$$

$$2x \le 1$$

$$x \le \frac{1}{2}$$

מתקיים בכל התחום.

הערה: כיוון ש x שלילי, ברור ש $x \le |x-1|$ שמתי לכך לב הרגע.

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $(1+i)z^4 = (1+i)^8 - i(1+i)^6$

ראשית נחלק ב $1+i$

$$z^4 = (1+i)^7 - i(1+i)^5$$

נטפל בצד ימין

$$(1+i)^5((1+i)^2 - i) =$$

נטפל בביטוי אחד:

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

ולכן

$$(1+i)^2 - i = 2i - i = i$$

כעת נטפל בביטוי אחר

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

נחשב את

$$(1+i)^5 \cdot i = \left(\sqrt{2}\right)^5 cis\left(\frac{5\pi}{4}\right) cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^5 cis\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^5 cis\left(\frac{7}{4}\pi\right)$$

כעת יש לפתור את

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^5 cis\left(\frac{7}{4}\pi\right)$$

ארבעת הפתרונות נתונים ע"י הנוסחא

$$z_k = \sqrt[4]{\left(\sqrt{2}\right)^5} cis\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi k}{4}\right)$$

$$k = 0,1,2,3$$

3. נביט בשני הוקטורים $v = (1,0,1), u = (1,2,0)$.

מצאו וקטור w המאונך ל u וקבוע α כך ש $\alpha u + w = v$.

$$\alpha u + w = v$$

נכפול בוקטור u

$$\alpha u \cdot u + 0 = v \cdot u$$

כיוון ש $w \perp u$ נובע כי $w \cdot u = 0$

$$\alpha = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} = \frac{(1,0,1)(1,2,0)}{(1,2,0)(1,2,0)} = \frac{1}{5}$$

$$w = v - \frac{1}{5}u = (1,0,1) - \frac{1}{5}(1,2,0) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$$

יצאנו מנקודת ההנחה שקיים w כזה, אבל אולי אין?

ברור ש $\frac{1}{5}u + w = v$ נותר רק לוודא כי $w \perp u$

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right) \cdot (1,2,0) = 0$$

=

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{2n-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2}$

בדיקה: עבור $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) \stackrel{?}{=} \frac{\ln(2) + \ln(1)}{2}$$

הצד השמאלי שווה ל

$$\ln\left(\sqrt{2}\right) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

כיוון ש $\ln(1) = 0$ סיימנו.

יהי n עבורו הטענה נכונה, כלומר נתון כי

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2}$$

צריך להוכיח עבור $n+1$, כלומר צריך להוכיח כי

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{2}$$

נפתח את הביטוי השמאלי

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right)\right) + \left(\sum_{k=2n}^{2n+1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right)\right) \overset{\text{הנחה}}{=}$$

$$= \frac{\ln(2) + \ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}}\right)$$

נטפל קצת בביטויים עם הלוג:

$$\ln\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(2n+1) - \ln(2n) + \ln(2n+2) - \ln(2n+1)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(2n+2) - \ln(2n)]$$

נחבר ביחד את התוצאות ונקבל כי

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{\overbrace{\ln(2) + \ln(n)}^{\ln(2n)} + \ln(2n+2) - \ln(2n)}{2} = \frac{\ln(2(n+1))}{2} = \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{2}$$

5. פתרו את האינטגרל $\int\left[\left(x^3 + x + 1\right)\cdot \arctan(x)\right]dx$

$$\int\left((x^3 + x + 1)\arctan(x)\right)dx = \left\{\begin{matrix} f' = x^3 + x + 1 & g = \arctan(x) \\ f = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x & g' = \frac{1}{1+x^2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x\right)\arctan(x) - \int \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x}{x^2+1} dx$$

נייפה קצת את המציאות

$$\int \frac{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x}{x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^4+2x^2+4x}{x^2+1}dx$$

נבצע (כמובן) חילוק פולינומים.

$$x^2+1$$
$$-------$$
$$x^4+2x^2+4x|x^2+1$$
$$x^4+x^2$$
$$-----$$
$$x^2+4x$$
$$x^2+1$$
$$----$$
$$4x-1$$

ולכן גילינו כי

$$\frac{x^4+2x^2+4x}{x^2+1} = x^2+1+\frac{4x-1}{x^2+1}$$

$$\int (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3}+x$$

נפריד

$$\frac{4x-1}{x^2+1} = \frac{4x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1} = 2\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

ולכן

$$\int \frac{4x-1}{x^2+1}dx = 2\ln(x^2+1)-\arctan(x)$$

סה"כ

$$\int\big((x^3+x+1)\arctan(x)\big)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\arctan(x)-\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\arctan(x)+C$$

הערה: קישור לתרגילי אינטגרלים נוספים, שאלות 2א.

6. הגדרה: אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **אנטי-סימטרי** אם

$$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}: \big((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\big)\to(a=b)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו אנטי-סימטרי.

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן האוספים הבאים הינם אנטי-סימטרים ואילו אינם אנטי-סימטריים:

$$T=\left\{(n,m)\;\middle|\;\frac{n-m}{2}\in\mathbb{Z}\right\},\quad S=\{(n,n+1)\mid n\in\mathbb{N}\},\quad R=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$$

סעיף א':

R אינו אנטי-סימטרי אם קיימים $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש $(a,b)\in R$ וגם $(b,a)\in R$ וגם $a\neq b$

סעיף ב':

R אינו אנטי סימטרי, כיוון שאפשר לבחור את $a=1, b=2$ ואכן

$$(1,2)\in R \wedge (2,1)\in R \wedge\ 1\neq 2$$

כעת נוכיח כי S אנטי סימטרי.

יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש $(a,b)\in S$ וגם $(b,a)\in S$ צריך להוכיח כי $a=b$.

כיוון ש $(a,b)\in S$ נובע כי

$$b=a+1$$

באופן דומה, כיוון ש $(b,a)\in S$ נובע כי

$$a=b+1$$

לכן $b=b+2$ בסתירה.

כלומר התנאי

$$(a,b)\in S \wedge (b,a)\in S$$

הוא שקר, ושקר כידוע גורר כל דבר, כלומר הביטוי

$$\big((a,b)\in S \wedge (b,a)\in S\big)\rightarrow (a=b)$$

הוא אמת.

הערה: עבור S גם הפסוק הבא מתקיים:

$$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}: \underbrace{\big((a,b)\in S \wedge (b,a)\in S\big)}_{\text{כי זה שקר}}\rightarrow (a\neq b)$$

כעת האוסף T אינו אנטי-סימטרי כיוון שעבור $a=3, b=1$

$$(3,1),(1,3)\in T\wedge(1\neq 3)$$

הערה: הם בT כיוון ש $\frac{1-3}{2}=-1\in\mathbb{Z}$ וכן $\frac{3-1}{2}=1\in\mathbb{Z}$

7. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $(A\setminus B)\cup B=A \Leftrightarrow B\setminus A=\phi$

נוכיח גרירה דו כיוונית

בכיוון ראשון נניח כי $B\setminus A=\emptyset$ צריך להוכיח כי

$$(A\setminus B)\cup B=A$$

צריך להוכיח שיוויון בין קבוצות, נבצע הכלה דו כיוונית:

בכיוון ראשון יהי $x\in A$ צריך להוכיח $x\in(A\setminus B)\cup B$

נחלק למקרים: אם $x \in B$ אז בוודאי $x \in (A \setminus B) \cup B$

אחרת, $x \notin B$ ויחד עם העובדה כי $x \in A$ נובע כי $a \in A \setminus B$ ושוב

$$x \in (A \setminus B) \cup B$$

בכיוון השני (ההכלה השנייה בגרירה הראשונה)

יהי

$$x \in (A \setminus B) \cup B$$

צ"ל $x \in A$

נב"ש $x \notin A$ מכך נובע כי $x \notin B$ שכן $B \setminus A = \emptyset$

אבל גם נובע כי $x \notin A \setminus B$ בסתירה לכך ש

$$x \in (A \setminus B) \cup B$$

כעת נעבור לגרירה השנייה:

הפעם נתון כי

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

צריך להוכיח כי

$$B \setminus A = \emptyset$$

נב"ש כי $B \setminus A \neq \emptyset$

כלומר, קיים $x \in B \setminus A$

לכן $x \in B$ וגם $x \notin A$

לכן

$$x \in (A \setminus B) \cup B$$

אבל $x \notin A$ בסתירה לכך ש

$$(A \setminus B) \cup B = A$$