

אלגברה לינארית למורים - תרגיל 5

שאלה 1

קבעו לכל אחד מהמרחבים הבאים אם הוא תת מרחב. אם כן הוכיחו ואם לא הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

פתרון

$$V = \mathbb{R}^4, F = \mathbb{R}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} .1$$

נוכיח כי W תת מרחב וקטורי:

סגירות לחיבור:

$$\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ a' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+a'+b' \\ b+b' \\ a+a' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ a+a' \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

סגירות לכפל בסקלר:

$$\alpha \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a+b) \\ \alpha b \\ \alpha a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha b \\ \alpha a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

קיום איבר נייטרלי:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W, a=0, b=0$$

ולכן W תת מרחב וקטורי.

$$V = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a+b+c=0 \right\} .2$$

נוכיח כי W תת מרחב וקטורי:

1. סגירות לחיבור:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} \in W$$

הסבר: $a+a'+b+b'+c+c' = (a+b+c) + (a'+b'+c') = 0+0=0$

2. סגירות לכפל בסקלר:

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} \in W$$

הסבר: $\alpha a + \alpha b + \alpha c = \alpha(a+b+c) = \alpha \cdot 0 = 0$

3. קיום איבר נייטרלי:

הסבר: $0+0+0=0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

$$V = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a \geq 0 \right\} \quad \mathbf{.3}$$

זה אינו תת מרחב. נפריך ע"י דוגמא נגדית:

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$$

ולכן אין סגירות לכפל בסקלר.