מבחן בדידה קיץ תשפא־פתרון

י"ג תשרי תשפ"ב, 19.9.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר־און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר־און, תמר בר־און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (20 נק') תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם $P(A)\cup P(B)\subseteq C$ אז $A\cup B\in P(C)$.

פתרון:

הפרכה: $A=B=\{1\},C=P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$, אז כמובן $P(A)\cup P(B)=C\subseteq C$, ואילו $A\cup B=\{1\}\notin\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},C\}=P(C)$.

(ב) אם $A\cap B=\emptyset$ אז $C\setminus A\neq C\setminus B$.

פתרון:

הפרכה: $A=\{1\},B=\{2\},C=\{3\}$, אז כמובן $A\cap B=\emptyset$, ואילו $C\setminus A=C\setminus B=\{3\}$.

(ג) אם $A\cap B=\emptyset$ אז $A\setminus(C\setminus B)=A\setminus C$.

פתרון:

הוכחה: $\subseteq$: יהי $x\in A\setminus(C\setminus B)$ זאת אומרת: $x\in A\wedge x\notin C\setminus B$, ולכן $x\in A\wedge(x\notin C\vee x\in B)$. כעת לפי פילוג: $\underbrace{(x\in A\wedge x\in B)}_{F}\vee(x\in A\wedge x\notin C)$,

ולכן $x\in A\setminus C$.

$\supseteq$: יהי $x\in A\setminus C$ לכן $x\in A\wedge x\notin C$. מכיון ש־ $x\in A$ אז מתקיים $x\notin B$, ולכן $x\in B$ זהו שקר. כידוע $p\equiv p\vee F$, ולכן אצלנו $x\notin C\equiv x\notin C\vee x\in B$. בסה"כ קיבלנו שמתקיים $x\in A\wedge(x\notin C\vee x\in B)$, מה שאומר $x\in A\setminus(C\setminus B)$.

(ד) $P(B\setminus A)\subseteq P(B)\setminus P(A)$.

פתרון:

הפרכה: מכיון שהקבוצה הריקה שייכת לכל קבוצת חזקה נקבל $\emptyset\in P(A),P(B),P(B\setminus A)$ ולכן $\emptyset\notin P(B)\setminus P(A)$, וקיבלנו שבכל מקרה יש איבר שנמצא בצד שמאל ולא בצד ימין. כלומר: הוכחנו שתמיד הטענה לא נכונה. למשל אפשר לקחת $A=B=\emptyset$, ואז בצד ימין יש קבוצה ריקה, ובצד שמאל יש $P(\emptyset)\nsubseteq\emptyset$.

2. (21 נק') נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כך: לכל $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים:

$$(a_1,b_1)\,R\,(a_2,b_2)\iff[(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\vee(b_1-b_2<a_1-a_2)]$$

(א) הוכיחו כי R יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

פתרון:

רפלקסיבי: יהי $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, אזי מתקיים $(a,b)=(a,b)$, ולכן לפי הגדרה $(a,b)R(a,b)$.

אנטי סימטרי: נניח $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(a,b)$. אם $(a,b) \neq (c,d)$ אז לפי הגדרת R מתחייב $(b-d < a-c) \wedge (d-b < c-a)$בסתירה לכך שאם $x < y$ אז $-y < -x$, ולכן לא מתקיים $-y < -x$. ולכן מתחייב $(a,b) = (c,d)$.

טרנזיטיבי: נניח $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$. אם $(a,b) = (c,d) \vee (c,d) = (e,f)$ סיימנו. אחרת:

$$(b-d < a-c) \wedge (d-f < c-e)$$

ולכן:

$$b-f = b-d+d-f < a-c+c-e = a-e$$

ולכן $(a,b)R(e,f)$.

(ב) האם לקבוצה $\{(1,2),(2,3)\}$ יש חסם עליון ביחס R? אם כן, מצאו אותו; אחרת, הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

ראשית, שני האיברים לא מתייחסים זה לזה, לכן חסם מלעיל בהכרח לא בקבוצה. כעת, קבוצת חסמי המלעיל היא:

$$\{(a,b) \mid (2-b < 1-a) \wedge (3-b < 2-a)\} = \{(a,b) \mid a < b-1\}$$

נראה שלכל חסם מלעיל יש חסם מלעיל כך שאינם מתייחסים זה לזה, ולכן אין קטן ביותר מבין חסמי המלעיל ואין חסם עליון: יהי (a,b) חסם מלעיל, לכן נקבל ש־ $a < b-1$. ניקח $(a+1,b+1)$ ונקבל שהוא גם חסם מלעיל: $a+1 < b = b+1-1$. אבל מכיון ש־ $b-(b+1) = -1 = a-(a+1)$ וכן $a+1-a = 1 = b+1-b$ נקבל $((a+1,b+1),(a,b)) \notin R$,$((a,b),(a+1,b+1))$.

(ג) האם לקבוצה $\{(1,2),(2,3)\}$ יש חסם תחתון ביחס R? אם כן, מצאו אותו; אחרת, הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

ראשית, שני האיברים לא מתייחסים זה לזה, לכן חסם מלרע בהכרח לא בקבוצה. כעת, קבוצת חסמי המלרע היא:

$$\{(a,b) \mid (b-2 < a-1) \wedge (b-3 < a-2)\} = \{(a,b) \mid a > b-1\}$$

נראה שלכל חסם מלרע יש חסם מלרע כך שאינם מתייחסים זה לזה, ולכן אין גדול ביותר מבין חסמי המלרע ואין חסם תחתון: יהי (a,b) חסם מלרע, לכן נקבל ש־ $a > b-1$, ניקח $(a+1,b+1)$ ונקבל שהוא גם חסם מלרע: $a+1 > b = b+1-1$. אבל מכיון ש־ $b-(b+1) = -1 = a-(a+1)$ וכן $a+1-a = 1 = b+1-b$ נקבל $((a+1,b+1),(a,b)) \notin R$,$((a,b),(a+1,b+1))$.

3. (24 נק') הגדרה: יחס R על $\mathbb{N}$ נקרא מגדיל אם לכל $(m,n) \in R$ מתקיים: $m \leq n$.
יהי R יחס על $\mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם R יחס מגדיל אז R טרנזיטיבי.

פתרון:

הפרכה: ניקח את $R = \{(1,2),(2,3)\}$. הוא מגדיל אך לא טרנזיטיבי.

(ב) אם R יחס מגדיל אז R אנטי סימטרי.

פתרון:

הוכחה: נניח $aRb \wedge bRa$. מכיון ש-R מגדיל נקבל: $a \leq b \wedge b \leq a$ ולכן $a = b$.

(ג) אם R יחס מגדיל אז קיים יחס S על $\mathbb{N}$ כך ש: $R \subseteq S$ וגם S יחס סדר חלקי.

פתרון:

הוכחה: יהי R יחס מגדיל. ניקח את $S = \leq$ (כלומר S זהו היחס "קטן שווה" הרגיל על הטבעיים). לפי הגדרת מגדיל נקבל $R \subseteq S$ כי אם aRb אז $a \leq b$ וזה בדיוק aSb. בנוסף, כמובן ש-$\leq$ יחס סדר חלקי.

(ד) אם R יחס מגדיל וגם יחס שקילות אז $R = I$ (כאשר $I = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ הינו יחס הזהות).

פתרון:

הוכחה: יהי R יחס מגדיל ושקילות. נראה $R = I$:

$\supseteq$: R שקילות ולכן רפלקסיבי ולכן $R \supseteq I$.

$\subseteq$: הוכחנו לעיל שיחס מגדיל הוא אנטי סימטרי. מכיון שהוא גם שקילות אז הוא גם סימטרי. יחס סימטרי ואנטי סימטרי תמיד מוכל בזהות.

4. (21 נק') נסמן $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את קבוצת כל הפונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$. נגדיר יחס $\sim$ על X כך:
לכל $f,g \in X$ מתקיים: $f \sim g$ אם ורק אם קיימות $h_1,h_2 \in X$ הפיכות כך ש $f \circ h_1 = g \circ h_2$.

(א) הוכיחו: $\sim$ יחס שקילות על X.

פתרון:

רפלקסיבי: ניקח את הזהות ואז כמובן $f \circ I = f \circ I$.

סימטרי: נניח $f \sim g$ זאת אומרת שיש h_1,h_2 הפיכות כך ש-$f \circ h_1 = g \circ h_2$, ולכן $g \circ h_2 = f \circ h_1$ ולכן $g \sim f$ (בקיום לא חשוב הסדר, ניתן להחליף).

טרנזיטיבי: נניח $f \sim g \wedge g \sim t$. זאת אומרת שיש h_1,h_2,h_3,h_4 הפיכות כך ש-$f \circ h_1 = g \circ h_2, g \circ h_3 = t \circ h_4$. נקבל:

$$f \circ (h_1 \circ h_2^{-1} \circ h_3) = \underbrace{(f \circ h_1 \circ h_2^{-1})}_{=g} \circ h_3 = g \circ h_3 = t \circ h_4$$

ולכן $f \sim t$.

(ב) עבור פונקצית הזהות $I \in X$, קבעו והוכיחו אם $[I]_\sim$ סופית, מעוצמה $\aleph_0$, מעוצמה $\aleph$, מעוצמה $2^\aleph$ או אחרת.

פתרון:

ראשית נראה: $f \in [I]_\sim$ אם ורק אם f הפיכה.

$\Leftarrow$: אם f הפיכה אז נוכל לקחת $h_1 = I, h_2 = f^{-1}$ ואז $I \circ h_1 = I \circ I = I = f \circ f^{-1} = f \circ h_2$, ולכן $f \sim I$ ולכן $f \in [I]_\sim$.

$\Rightarrow$: אם $f \in [I]_\sim$ אז יש h_1, h_2 הפיכות כך ש־ $I \circ h_1 = f \circ h_2$, ואז נקבל $f = I \circ h_1 \circ h_2^{-1}$ הפיכה כהרכבת הפיכות.

כעת נראה שקבוצת ההפיכות היא מעוצמה $2^\aleph$. היא מוכלת ב־ X ולכן בוודאי $|[I]_\sim| \le 2^\aleph$.

מצד שני נגדיר פונקציה $F : \{0,1\}^{(0,\infty)} \to [I]_\sim$ ע"י:

$$F(f)(x) = \begin{cases} -x & x > 0 \wedge f(x) = 1 \\ x & x > 0 \wedge f(x) = 0 \\ -x & x < 0 \wedge f(-x) = 1 \\ x & x < 0 \wedge f(-x) = 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

לפי הגדרת $F(f)$ נקבל שהיא הפיכה, כי $F(f)^{-1} = F(f)$, ובנוסף F חח"ע: תהיינה $f \neq g \in \{0,1\}^{(0,\infty)}$. זאת אומרת שקיים $x > 0$ כך ש־ $f(x) \neq g(x)$. אם $f(x) = 1, g(x) = 0$ נקבל:

$$F(f)(x) = -x \neq x = F(g)(x)$$

ולכן $F(f) \neq F(g)$. בדומה, אם $f(x) = 0, g(x) = 1$ נקבל:

$$F(f)(x) = x \neq -x = F(g)(x)$$

בסה"כ קיבלנו $2^\aleph = \left|\{0,1\}^{(0.\infty)}\right| \le [I]_\sim$. לפי קש"ב נקבל $|[I]_\sim| = 2^\aleph$.

(ג) תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$. קבעו והוכיחו אם $[f]_\sim$ סופית, מעוצמה $\aleph_0$, מעוצמה $\aleph$, מעוצמה $2^\aleph$ או אחרת.

פתרון:

f היא פונקציה קבועה, כלומר ישנו $b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = b$. נראה ש־ $[f]_\sim = \{f\}$ ולכן היא סופית:

מצד אחד כמובן $f \in [f]_\sim$.

מצד שני, אם $g \in [f]_\sim$ זאת אומרת שיש h_1, h_2 הפיכות כך ש־ $f \circ h_1 = g \circ h_2$. כעת נקבל:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f \circ h_1(x) = f(h_1(x)) = b$$

ולכן $f \circ h_1 = f$. נראה ש־ $g = f$: יהי $x \in \mathbb{R}$ צריך להראות ש־ $g(x) = b$:
מכיון ש־ h_2 הפיכה ובפרט על, נקבל שיש $y \in \mathbb{R}$ כך ש־ $h_2(y) = x$. כעת מהשיוויון לעיל נובע:

$$g \circ h_2(y) = f \circ h_1(y) = b$$

ולכן:

$$g(x) = g(h_2(y)) = g \circ h_2(y) = b$$

5. הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא <u>מטוקטקת</u> אם: לכל $x_1 < x_2 \in A$ קיים $x_3 \in \mathbb{R} \setminus A$ כך ש־ $x_1 < x_3 < x_2$.

(א) תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מטוקטקת, ויהיו $x_1 < x_2 \in A$. הוכיחו שקיימים <u>אינסוף</u> ערכים שונים $x \in \mathbb{R} \setminus A$ כך ש־ $x_1 < x < x_2$.

פתרון:

תהי A מטוקטקת, ויהיו $x_1 < x_2 \in A$.

טענה: $(x_1, x_2) \cap A^c$ אינסופית. נניח בשלילה שהיא קבוצה סופית. כלומר ישנו $n \geq 3$ טבעי כך ש־ $x_1 < x_3 < \cdots < x_n < x_2$ ולכל $x \in (x_1, x_2) \setminus \{x_3 \dots, x_n\}$ מתקיים $x \in A$. בפרט הקטע $[x_1, x_3) \subseteq A$ ואז יש $y = \frac{x_3 - x_1}{2}$ המקיים $x_1 < y$ וכל המספרים ביניהם שייכים ל־ A ולכן A לא מטוקטקת, בסתירה. לכן הקבוצה אינסופית.

(ב) הוכיחו שלא קיימת קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}$ כך ש: S מטוקטקת וגם אינה מוכלת באף קבוצה מטוקטקת אחרת.

פתרון:

נראה שלכל קבוצה S מתקיים: S לא מטוקטקת או שהיא מוכלת בקבוצה מטוקטקת. תהי $S \subseteq \mathbb{R}$. אם היא לא מטוקטקת סיימנו. אם היא ריקה אז היא מוכלת במטוקטקת $\{1\}$. אם $S = \{x\}$ אז מוכלת במטוקטקת $\{x, x+1\}$. אחרת, יש $x_1 < x_2 \in S$ ומכיון שמטוקטקת ישנו $x_3 \in \mathbb{R} \setminus S$ כך ש־ $x_1 < x_3 < x_2$

טענה: $S' = S \cup \{x_3\}$ מטוקטקת (ואז, כיון שהיא המכילה את S ממש, סיימנו).

הוכחה: יהיו $s_1 < s_2 \in S'$, צריך למצוא $s_3 \in \mathbb{R} \setminus S'$ כך ש־ $s_1 < s_3 < s_2$. נחלק למקרים:

אם $s_2 < x_3$ או $x_3 < s_1$, נקבל ש־ $s_1, s_2 \in S$ ומטקטוקה של S קיים $s_3 \in \mathbb{R} \setminus S$ כך ש־ $s_1 < s_3 < s_2$, ומכיון ש־ $x_1 < x_3 < x_2$ נקבל שבהכרח $s_3 \neq x_3$ ולכן $s_3 \in \mathbb{R} \setminus S'$ כדרוש.

אם לא, ובנוסף $s_2 < x_2$ או $x_1 < s_1$, אז ניתן למצוא איבר כדרוש $x_2 < s_3 <$ s_2 או $s_1 < s_3 < x_1$, מטקטוקה של S (שימו לב, מהעובדה שאנחנו לא במצב הראשון נובע $s_1 < s_3$ במקרה הראשון, $s_3 < s_2$ בשני).

אחרת, $x_1 \leq s_1 \leq x_3 \leq s_2 \leq x_2$. ראשית, מכיון ש־ $s_1 < s_2$ אז: $s_1 < x_3$ או $x_3 < s_2$. נניח $s_1 < x_3$ אזי נטען $(s_1, x_3) \cap S^c$ אינסופית. הוכחה: נניח בשלילה שסופית, אז כמו בסעיף א יש ערך קטן ביותר ביניהם שלא ב־S, ואז יש קטע ב־S בסתירה לטקטוק. הוכחה דומה עבור המקרה $x_3 < s_2$.

(ג) הוכיחו שקיימת שרשרת $M \subseteq P(\mathbb{R})$ כך שלכל $A \in M$ מתקיים ש־ A מטוקטקת, אך האיחוד $U = \bigcup_{A \in M} A$ <u>אינה</u> קבוצה מטוקטקת.

פתרון:

נתבונן בקבוצת המטוקטקות $X \subseteq P(\mathbb{R})$: כלומר, $Y \in X$ אם ורק אם Y מטוקטקת, ונסדר את X עם הכלה. $\{1\}$ מטוקטקת, ולכן $\{\{1\}\}$ שרשרת ב־ X, ולפי האוסדורף היא מוכלת בשרשרת מקסימלית נסמנה M. היא שרשרת ב־ X, ולכן לכל $A \in M$ מתקיים: A מטוקטקת. נניח בשלילה שהאיחוד $U = \bigcup_{A \in M} A$ קבוצה מטוקטקת, אז לפי סעיף קודם, קיימת U' מטוקטקת כך ש־ $U \subset U'$ (הכלה ממש), בסתירה למקסימליות של U. לכן האיחוד $U = \bigcup_{A \in M} A$ לא מטוקטקת.