התמרת לפלס Laplace Transform

הגדרה

אם $f(t)$ מוגדרת עבור $t \in (0,\infty)$, ועבור $s \in \mathbb{R}$ כלשהו האינטגרל $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$ <u>קיים</u>, אזי קוראים ל$F(s)$ "התמרת לפלס" של $f(t)$.

דוגמאות[1]

(0) $f(t) = 1$,

$$s > 0 \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

(1) $f(t) = t^n$

$$\begin{matrix} n > -1 \\ s > 0 \end{matrix} \qquad F(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty (st)^n e^{-st} s\, \mathrm{d}t = ...$$

נגדיר $y = st$

$$... = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty y^n e^{-y}\, \mathrm{d}y = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

ואם n שלם, אז זה שווה ל$\frac{n!}{s^{n+1}}$

(2) $f(t) = e^{\alpha t}$, α קבוע.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}\, \mathrm{d}t = \qquad s > \alpha$$

$$= \left[\frac{e^{(\alpha-s)t}}{(\alpha - s)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s - \alpha}$$

[1] כדאי לזכור אותן

(3) $f(t)=\cos\alpha t$

$$s>0 \qquad F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos\alpha t\,\mathrm{dt}=\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{(-s+i\alpha)t}+e^{(-s-i\alpha)t}\right)\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(-s+i\alpha)t}}{-s+i\alpha}+\frac{e^{(-s-i\alpha)t}}{-s-i\alpha}\right]_0^\infty=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-s+i\alpha}+\frac{1}{-s-i\alpha}\right)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

(4) $f(t)=\sin\alpha t$ - נקבל באופן דומה:

$$F(s)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

הגדרות

1. f היא פונקציה רציפה למקוטעין על $(0,\infty)$ אם יש מספר סופי של נקודות של אי-רציפות, ובכל נקודה x של אי-רציפות הגבולות $\lim_{t\to x^-}f(t)\,,\,\lim_{t\to x^+}f(t)$ קיימים(אבל לאו דווקא שווים).
2. f היא פונקציה מסוג מעריכי אם קיימים c,α כך שלכל $t\in(0,\infty)$, $|f(t)|\leq ce^{\alpha t}$
   דוגמה של פונקציה <u>שאיננה</u> מסוג מעריכי: e^{t^2}(או $e^{e^{e^t}}$ וכו')

משפט(לא נוכיח אבל קל)

אם f היא רציפה למקוטעין ומסוג מעריכי אזי קיים β כך ש$F(s)$ מוגדר לכל $s>\beta$.

נגדיר:

- $A=${פונקציות f מוגדרות על $(0,\infty)$, רציפות למקוטעין, מסוג מעריכי}
- $B=${פונקציות מוגדרות על (β,∞) עבור איזשהו $\beta\in\mathbb{R}$}

משפט(לא נוכיח - קשה מאוד!)

אם $f,g\in A$ וההתמרות של f,g הן שוות(בB) אזי $f(t)=g(t)$ לכל $t\in(0,\infty)$ למעט(אולי) בנקודות שאחת מf או g איננה רציפה.

תוצאה

אם אנחנו יודעים התמרה של f - בעצם[2] יודעים את f.

תכונות של התמרת לפלס

(1) ליניאריות

אם ההתמרה של $f_1(t)$ היא $F_1(s)$ מוגדרת בקטע (β_1,∞), וההתמרה של $f_2(t)$ היא $F_2(s)$ מוגדרת בקטע (β_2,∞), אזי ההתמרה של $c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$ היא $c_1 F_1(s)+c_2 F_2(s)$ מוגדרת בקטע $(\max(\beta_1,\beta_2),\infty)$.

הוכחה

ע"י ליניאריות של אינטגרל.

(2)

אם ההתמרה של $f(t)$ היא $F(s)$ מוגדרת ב(β,∞), אזי ההתמרה של $e^{\alpha t} f(t)$ היא $F(s-\alpha)$ מוגדרת ב$(\beta+\alpha,\infty)$

הוכחה

$$\int_0^\infty d-st\left[e^{\alpha t} f(t)\right]\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(3)

אם ההתמרה של $f(t)$ היא $F(s)$, אזי ההתמרה של $f(at)$ היא $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ [$a>0$ קבוע]

הוכחה

$$\int_0^\infty e^{-st} f\left(\underbrace{at}_{t':=at}\right)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-st'/a} f(t')\,\mathrm{d}\frac{t'}{a}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\blacksquare$$

[2] לא יודעים את כל f, אבל מה שלא יודעים זה מספר סופי של נקודות אי רציפות - את שאר f יודעים.

דוגמאות

$$\cos t \to \frac{s}{s^2+1}$$

$$\cos \alpha t \to \frac{1}{\alpha}\frac{s/\alpha}{\left(s/\alpha\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

(4)

התמרה של $f'(t)$ היא $sF(s) - f(0)$

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[f(t)\cdot e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)\, \mathrm{d}t =$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \to s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$f''' = s\left(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right) - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

(5)

ההתמרה של $tf(t)$ היא $-\frac{df}{ds}$, $F(s) = \int_0^\infty e^{-ts} f(t)\ \mathrm{d}t$

$$\frac{df}{ds} = \int_0^\infty -te^{-ts} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^\infty e^{-ts}\left[tf(t)\right]\ \mathrm{d}t$$

שימוש בפתרון מד"ר

פונקציות של t, $\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{matrix}$ $\quad y'' - y = 1$ אי הומוגני עם מקדמים קבועים ותנאי התחלה.

נעשה התמרה: ההתמרה פעולה ליניארית, נעשה התמחה לכל משתנה בנפרד, ל־y'' ול־y.

- ההתמרה של $y(t)$ היא $Y(s)$

- ההתמרה של $y''(s)$ היא $Y''(s)=s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{=0}-\underbrace{y'(0)}_{=1}$

נציב במשוואה:

$$\left[s^2Y(s)-s\cdot 0-1\right]-Y(s)==\frac{1}{s}$$

$$\left(s^2-1\right)Y(s)=\frac{1}{s}+1=\frac{1+s}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1+s}{s\left(s^2-1\right)}=\frac{1}{s(s-1)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}$$

$$t^2\to\frac{1}{s^3}$$

$$e^{\alpha t}t^2\to\frac{1}{(s-\alpha)^3}$$

לפי טבלת ההתמרות מחפשים את $y(t)$ שנותנת לנו את ההתמרה $Y(s)$:

$$\boxed{y(t)=e^t-1}$$

עוד דוגמה

$$\begin{aligned}x'+x+2y&=e^{2y}\\ y'+2x'-x&=0\end{aligned}\qquad x(0)=y(0)=0$$

ההתמרות הן $\begin{array}{l}x\to X\\ y\to Y\end{array}$

נעשה התמרה:

$$sX+X+2Y=\frac{1}{s-2}$$

$$sY+2sX-X=0\Rightarrow Y=\frac{(1-2s)X}{s}=\frac{1}{s}-2X$$

$$\left[s+1+2\left(\frac{1}{s}-2\right)\right]X=\frac{1}{s-2}$$

$$X=\frac{1}{(s-2)\left(s+\frac{2}{s}-3\right)}=\frac{s}{(s-2)\left(s^2-3s+2\right)}=\frac{s}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{2}{(s-2)^2}$$

$$\frac{1}{(s-2)^2}=\frac{-d}{ds}\frac{1}{(s-2)}$$

$$x(t) = e^{t} - e^{2t} + 2te^{2t}$$

$$Y = \frac{1-2s}{s}X = \frac{1-2s}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{-3}{(s-2)^2}$$

$$y(t) = -e^{t} + e^{2t} - 3te^{2t}$$

עוד דוגמה

$$y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos 3t$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = -1$$

$$\Rightarrow \left(s^2Y + 1\right) + 4sY + 13Y = \frac{2}{s^2} + 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$\Rightarrow \left(s^2+4s+13\right)Y = \frac{2}{s^2-1} + \frac{3s+6}{s^2+4s+13} = \frac{2\left(s^2+4s+13\right) - s^2\left(s^2+4s+13\right) + (3s+6)s^2}{\left(s^2+4s+13\right)s^2}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{-s^4 - s^3 - 5s^2 + 8s + 26}{s^2\left(s^2+4s+13\right)^2} = ...$$

נפשט במחשב

$$... = \frac{3s+6}{\left(s^2+4s+13\right)^2} + \frac{2}{13s^2} + \frac{1}{169}\cdot\frac{8s-163}{s^2+4s+13} - \frac{8}{169s} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(s+2)^2+9}\right) = \frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t$$

פונקציית Heaviside

דוגמה

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ההתמרה:

$$\int_0^\infty H\left(t-c\right)e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_c^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_c^\infty=\frac{e^{-sc}}{s}$$

פונקציית $H_{a,b}=\begin{cases}1 & a<tcb\\ 0 & t<a,t>b\end{cases}$

$$H\left(t-a\right)-H\left(t-b\right)$$

ההתמרה:

$$\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}$$

מה ההתמרה? $f\left(t-c\right)H\left(t-c\right)$ כאשר $c>0$

$$\int_0^\infty t\left(t-c\right)H\left(t-c\right)e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_c^\infty f\left(t-c\right)H\left(t-c\right)e^{-st}\,\mathrm{d}t\underset{t=c+t'}{=}\int_0^\infty f\left(t'\right)e^{-s\left(c+t'\right)}\,\mathrm{d}t'=e^{-sc}F\left(s\right)$$

תרגיל

כתוב את הפונקציה ע"י פונקציית Heaviside ומצאו את אתמרת לפלס שלה.

$$f\left(t\right)=\begin{cases}1 & 0<t\leq 1\\ 4 & 1<t\leq 3\\ 6 & 3<t\leq 5\\ -3 & t>5\end{cases}$$

פונקציית Heaviside - נתחיל משמאל:

$$f\left(t\right)=H\left(t\right)+3H\left(t-1\right)+2H\left(t-3\right)-2H\left(t-5\right)$$

$$F\left(s\right)=\frac{1}{s}+3\frac{e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-3s}}{s}-\frac{9e^{-5s}}{5}=\frac{1}{s}\left(1+3e^{-5}+2e^{-3s}-9e^{-5s}\right)$$

ננסה לפתור:

$$y''-4y'+3y=\begin{cases}\sin t & 0<t<\pi\\ 0 & t\geq\pi\end{cases}$$

$$\sin t - \sin t H(t-\pi) = \sin t + \sin(t-\pi) H(t-\pi)$$

$$s^2 Y - 4sY + 3Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} e^{-s\pi}$$

$$\underbrace{\left(s^2 - 4s + 3\right)}_{(s-1)(s-3)} Y = \frac{1}{s^2+1}\left(1 + e^{-s\pi}\right)$$

(משאירים לפעם הבאה)