

# סיבוכיות מקום

שבוע שעבר:  $\text{DSPACE}(O(1)) \subset \text{DSPACE}(O(\log \log n))$

היום: נוכיח שזהו חסם הדוק:

## טענה

$$\text{DSPACE}(o(\log \log n)) = \text{DSPACE}(O(1))$$

## הוכחה

נראה  $\text{DSPACE}(o(\log \log n)) \subseteq \text{DSPACE}(O(1))$ .  
תהי  $L \in \text{DSPACE}(s(n))$  כאשר  $s \in o(\log \log n)$ .  $\Leftarrow$  קיימת מכונת טיורינג  
דטרמיניסטית  $M$  המכריעה את  $L$  בסיבוכיות מקום  $s(n)$ .

**הרעיון:** נראה שקיים קבוע  $c$  כך שלכל קלט  $x$ , סיבוכיות המקום של  $M$  היא  $c$ .

נראה שקיים קבוע  $n_0$  כך שלכל קלט  $x$ , סיבוכיות המקום של  $M$  היא לכל היותר  $s(n_0)$ .  
עבור קלט  $x$ , נבחין בין שני מקרים:

א. אם  $|x| \leq n_0$ , מכיוון שסיבוכיות המקום של  $M$  היא  $s(n)$ , זה מתקיים באופן טריויאלי.

ב. עבור  $|x| > n_0$ , נראה שקיים  $x'$  כך ש  $|x'| \leq n_0$  וסיבוכיות המקום של  $M(x)$  שווה לסיבוכיות המקום של  $M(x')$ .

**נגדיר:** "חצי קונפיגורציה"

1. התו הנוכחי על סרט הקלט
2. מיקום הראש על סרט העבודה
3. תוכן סרט העבודה
4. מצב המכונה

מספר חצאי הקונפיגורציות:  $t(n) = 2^{s(n)}$ .

עבור קלט  $x$  ואינדקס  $i$ , נסמן ב  $C_i$  את סדרת חצאי הקונפיגורציות של כל הפעמים ש  $M(x)$  נמצאת במיקום  $i$  על סרט הקלט.

מה מספר האפשרויות לסדרות מהסוג הנ"ל (עבור  $i$  קבוע)?

$$\left( \begin{array}{c} \text{number of possibilities} \\ \text{for a member in the series} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{maximal length} \\ \text{of series} \end{array} \right) \leq t(n)^{t(n)}$$

$$t(n)^{t(n)} \in O(2^{2^{s(n)}})$$

$\Leftarrow$  לכל  $i$ , מספר ה  $C_i$  האפשריים הוא  $O(2^{2^{s(n)}})$

**טענה:** עבור  $s(n) \in o(\log \log n)$  קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$  מתקיים  $O(2^{2^{s(n)}}) < \frac{n}{2}$

$\Leftarrow$  קיימים  $i, j, k$  עבורם  $C_i = C_j = C_k$ . אבל אז בכל פעם שאנחנו נמצאים במיקום  $i$ , יש לנו בדיוק אותו מידע שיש לנו במיקום  $j$ , כלומר אם

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline w_0 & \alpha & w_1 & \alpha & w_2 & \alpha & w_3 \\ \hline & C_i & & C_j & & C_k & \\ \hline \end{array}$$

$$x' = w_0 \alpha w_2 \alpha w_3$$

$$x'' = w_0 \alpha w_1 \alpha w_3$$

**טענה:** סיבוכיות המקום של  $M(x) =$  סיבוכיות המקום של  $M(x')$  או סיבוכיות המקום של  $M(x'')$

נניח בה"כ שסיבוכיות המקום של  $M(x) =$  סיבוכיות המקום של  $M(x')$ . שני מקרים:

א. אם  $|x'| \leq n_0$ , סיבוכיות המקום של  $M(x') \leq s(n_0) \Leftarrow$  סיבוכיות המקום של  $M(x)$  היא  $s(n_0) \geq$  וסיימנו.

ב. אם  $|x'| > n_0$ , נפעיל את אותו הטיעון על  $x'$  ונקבל  $|x''| < |x'|$  וסיבוכיות המקום של  $M(x') =$  סיבוכיות המקום של  $M(x'')$ .

■