תרגול 8 - אינטגרלים של פונקציות מרוכבות

הגדרות ומשפטים

- אינטגרל של פונקציה (מרוכבת) של משתנה ממשי

$$\int f(t)dt = \int (u(t) + iv(t))\, dt = \int u(t)dt + i \int v(t)dt$$

- אינטגרל של פונקציה מרוכבת לאורך עקום כלשהו
אם $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה חלקה כלשהי אזי

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

- המשפט היסודי לאינטגרל לאורך מסילה
אם f אנליטית בתחום D, ו- $\gamma : [a,b] \to D$ מסילה חלקה בתחום, אזי

$$\int_{\gamma} f'(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

- אינטגרל לאורך מסלול
אם f רציפה, ו- γ_1, γ_2 הן שתי מסילות חלקות המתאימות לאותו עקום Γ, אזי

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

ומסמנים: $\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$.

- משפט ההערכה
אם Γ קונטור (קו חלק למקוטעין) ו- f רציפה עליו, אזי

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leq \max_{z\in\Gamma} |f(z)| \cdot l(\Gamma)$$

כאשר $l(\Gamma)$ - אורך הקו.

1. חשבון את האינטגרל $I_n = \int_{\Gamma_R} (z-z_0)^n dz$ עבור כל $n \in \mathbb{Z}$ כאשר $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-z_0| = R\}$ ו־ $R>0$.

<u>פתרון:</u> $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ היא פרמטריזציה של Γ_R כאשר $0 \le t \le 2\pi$ וכן $\gamma'(t) = iRe^{it}$,
לכן נקבל:

$$I_n = \int_{\Gamma_R} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \left(z_0 + Re^{it} - z_0\right)^n iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} iRe^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

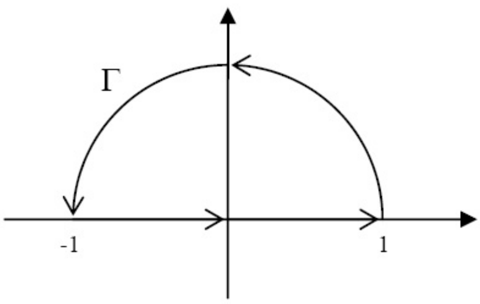
עבור $n \neq -1$ נקבל:
$$I_n = iR^{n+1} \cdot \left.\frac{e^{it(n+1))}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = iR^{n+1} \cdot \left(\frac{e^{2\pi i(n+1)}}{i(n+1)} - \frac{e^0}{i(n+1)}\right) = 0$$

עבור $n = -1$ נקבל:
$$I_{-1} = iR^{-1+1} \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi i$$

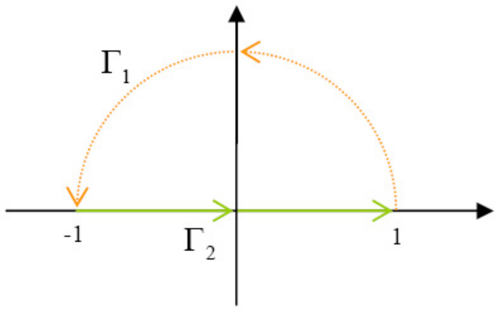
לסיכום קיבלנו:
$$\int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & : \ n \neq -1 \\ 2\pi i & : \ n = -1 \end{cases}$$

נשים לב לכך שהתוצאה אינה תלויה בבחירת הנקודה z_0 וגם לא ברדיוס R.

2. חשבון את האינטגרל $\int_\Gamma |z|\bar{z} dz$ כאשר Γ הוא העקום הבא:



<u>פתרון:</u> נחלק את המסלול Γ לשני חלקים $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ באופן הבא:



נמצא פרמטריזציות לשני הקווים:

$$\begin{array}{ll}\Gamma_1: & \gamma_1(t)=e^{it}, \quad 0\le t\le \pi \\ \Gamma_2: & \gamma_2(t)=t, \quad -1\le t\le 1\end{array}$$

עבור Γ_1 מתקיים:

$$|z|\,\bar{z}=|\gamma_1(t)|\,\overline{\gamma_1(t)}=|e^{it}|\,\overline{e^{it}}=e^{-it}$$
$$\gamma_1'(t)=ie^{it}$$

לכן נקבל:

$$\int_{\Gamma_1}|z|\,\bar{z}dz=\int_0^{\pi}e^{-it}\cdot ie^{it}dt=\int_0^{\pi}itdt=i\pi$$

עבור Γ_2 מתקיים:

$$|z|\,\bar{z}=|\gamma_2(t)|\,\overline{\gamma_2(t)}=|t|\,\bar{t}=|t|\,t$$
$$\gamma_2'(t)=1$$

לכן נקבל:

$$\int_{\Gamma_2}|z|\,\bar{z}dz=\int_{-1}^{1}|t|\,tdt=\int_{-1}^{0}-t^2dt+\int_0^1 t^2dt=-\frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=0$$

ולכן לסיכום נקבל:

$$\int_{\Gamma}|z|\,\bar{z}dz=\int_{\Gamma_1}|z|\,\bar{z}dz+\int_{\Gamma_2}|z|\,\bar{z}dz=i\pi$$

3. הוכיחו: $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}dz=0$ כאשר $\Gamma_R=\{z:|z|=R\}$.

<u>פתרון:</u> לפי משפט ההערכה,

$$\left|\int_{\Gamma_R}f(z)\right|\le 2\pi R\cdot\max_{z\in\Gamma_R}|f(z)|$$

נחפש הערכה כלשהי לחסם על הערך המוחלט של f לאורך המעגל Γ_R,

$$|f(z)|=\left|\frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}\right|=\frac{|z^2|\cdot\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|}{|z^4|\cdot\left|1+\frac{4}{z^2}\right|\cdot\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|}$$

נשתמש באי־שיוון המשולש, נזכור ש־ $z\in\Gamma_R$ ונקח את R מספיק גדול:

$$\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|\le 1+\left|\frac{2}{z}\right|+\left|\frac{5}{z^2}\right|=1+\frac{2}{R}+\frac{5}{R^2}\le 2$$

$$\left|1+\frac{4}{z}\right|\ge\left||1|-\left|\frac{4}{z}\right|\right|=\left|1-\left|\frac{4}{R}\right|\right|\ge\frac{1}{2}$$

$$\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|\ge\left|1-\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|\right|\ge\left|1-\left|\frac{2}{R}\right|-\left|\frac{2}{R^2}\right|\right|\ge\frac{1}{2}$$

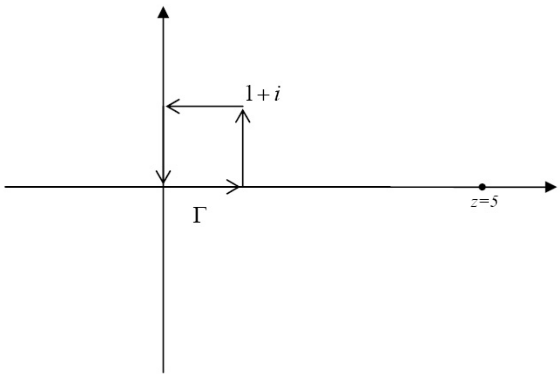
לכן עבור R מספיק גדול ועבור $z \in \Gamma_R$ קיבלנו את החסם:

$$|f(z)| = \frac{|z^2| \cdot \left|1 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2}\right|}{|z^4| \cdot \left|1 + \frac{4}{z^2}\right| \cdot \left|1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2}\right|} \le \frac{2}{R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \le \frac{8}{R^2}$$

כלומר עבור R מספיק גדול $\max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \le \frac{8}{R^2}$.
ולכן נסיק:

$$0 \le \left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \le 2\pi R \cdot \frac{8}{R^2} \longrightarrow_{R \to \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0$$

4. הוכיחו $\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \le 1$ כאשר $f(z) = \frac{1}{z-5}$ ו־ Γ הוא הקונטור הבא:



פתרון: נשים לב כי לכל z מתקיים $|\overline{z} - 5| = |z - 5|$. כמו כן, $|z - 5|$ שמציין את המרחק של z מ־5 מקבל מינימום עבור הנקודות על Γ בנקודה $z = 1$ (שהיא הנקודה הקרובה ביותר ל־ $z = 5$ על Γ). לכן:

$$\min_{z \in \Gamma} |\overline{z} - 5| = \min_{z \in \Gamma} |z - 5| = |1 - 5| = 4$$

ומכאן נסיק ש:

$$\max_{z \in \Gamma} |f(z)| = \max_{z \in \Gamma} \frac{1}{|\overline{z} - 5|} = \frac{1}{4}$$

בנוסף, די פשוט לראות כי האורך של Γ הוא 4 (מורכב מ־4 קטעים באורך 1). ולכן עפ"י משפט ההערכה נקבל:

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \le 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$