

תרגיל בית 1 תורת גלואה - תשע"ח

1. הוכיחו שכל תת-שדה של \mathbb{C} מכיל את \mathbb{Q} .
2. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה n . הוכיחו כי הקבוצה $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1}\}$ היא בסיס של המנה $F[x]/\langle f(x) \rangle$ (כמרחב וקטורי מעל F).
3. הציגו את

$$x^4 - x^3 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - x^2 - 1 \rangle$$

כצירוף לינארי של אברי הבסיס $\{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2\}$.

4. בנו שדה ממאפיין 3 ומגודל 9.
5. קבע האם הפולינומים הבאים פריקים או אי-פריקים מעל השדה הנתון, מצאו את הפירוק במידה וקיים.

(א) $x^6 + 26x + 52$ מעל \mathbb{Q} .

(ב) $x^4 + 6x^2 + 3x - 12$ מעל \mathbb{Q} .

(ג) $x^6 - 1$ מעל \mathbb{Z}_3 .

(ד) $x^6 - 1$ מעל \mathbb{Q} .

(ה) $x^6 - 1$ מעל \mathbb{R} (ומה קורה מעל \mathbb{C} ?)

(ו) $x^3 - 6x - 9$ מעל \mathbb{Q} .

(ז) $x^3 - 6x - 9$ מעל \mathbb{Z}_5 .

6. הראו שלכל פולינום מדרגה $1 <$ מעל \mathbb{Z} קיים ראשוני p כך שהפולינום פריק מודולו p .