

## תרגיל 7

1. הוכיחו כי לא כל הקבוצות המדידות לבג ב  $\mathbb{R}$  מדידות בורל וכי לא כל פונקציה רציפה מעתיקה קבוצה מדידה לבג לקבוצה מדידה לבג.

הדרכה:

- א. הגדירו את הפונקציה  $g = \varphi + x$  המוגדרת על הקטע  $[0, 1]$  כאשר  $\varphi$  הינה פונקצית קנטור אשר הגדרנו בכיתה. הראו כי  $g$  רציפה, חד חד ערכית, עולה ממש ועל  $[0, 2]$ .
- ב. הראו כי  $g([0, 1] \setminus C)$  הינה קבוצה פתוחה עם מידת לבג 1. מכאן שלקבוצה  $g(C)$  מידה 1 כאשר  $C$  הינה קבוצת קנטור.
- ג. השתמשו בעובדה כי אם  $E$  הינה קבוצה עם מידה חיובית אזי קיימת קבוצה  $M \subseteq E$  כך ש  $M$  איננה מדידה לבג (לא למדנו את זה אבל זה נכון) והראו כי קיימת קבוצה לא מדידה ב  $[0, 2]$  כך ש  $K = g^{-1}(M)$  הינה מדידה לבג.
- ד. הראו כי  $K$  איננה מדידה בורל וכי  $g(K) = M$ .

2. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  פונקציה אינטגרבלית, הוכיחו:  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm = 0$ .

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

3. תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה בעלת השתנות חסומה. הראו כי  $f$  הינה מדידה.