פתרון בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח — 89-133
מועד א' תשע"ה

1. חשב באמצעות אינטגרל את הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ של כל אחת מהסדרות הבאות:

(א)

$$a_n = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{2}{n+n}$$

(ב) לכל $k > 1$:

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

<u>פתרון:</u> שאלה זו דורשת זיהוי סכומי רימן, והמרתם לאינטגרל אליו הם מתכנסים. שני הסעיפים הם סכומי רימן: בסעיף (א), ניתן לחשב

$$a_n = \frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \frac{2}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{2}{1+1}\right)$$

שהינו סכום רימן עבור הפונקציה $f(x) = \frac{2}{1+x}$ על הקטע $[0,1]$, ע"י חלוקה שווה ל־n תתי־קטעים שווים באורך $\frac{1}{n}$ ובחירת נקודה מייצגת $x_i = \frac{i}{n}$ בקצה הימני של כל תת־קטע. לכן סכומי הרימן מתכנסים לאינטגרל

$$\int_0^1 \frac{2}{1+x}dx = 2\ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2$$

בסעיף (ב), אנחנו מקבלים

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{2}{n}\right)^k + \cdots + 1^k\right)$$

כמו בסעיף (א), ניתן לראות שמדובר בסכום רימן עבור הפונקציה $f(x) = x^k$ בקטע $[0,1]$ לפי חלוקה שווה ל־n תתי־קטעים שווים כמו בסעיף (א), ולכן מתכנסים לאינטגרל

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{k+1}$$

2. חשב את האינטגרלים הלא־מסויימים הבאים:

(א)

$$\int x\sin(x^2)dx$$

(ב)

$$\int x^2\sin(x)dx$$

(ג)

$$\int \sin(\ln(x))dx$$

<u>**פתרון:**</u> סעיף (א) פתיר ע"י הצבה $u = x^2$, שאז $du = 2xdx$ ומקבלים:

$$\begin{aligned}\int x\sin(x^2)dx &= \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\cdot 2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin(u)du \\ &= -\frac{1}{2}\cos(u)+C \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2)+C\end{aligned}$$

וניתן לבדוק ע"י גזירה!!
סעיף (ב) פתיר ע"י אינטגרציה לפי חלקים (פעמים):

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)dx &= -x^2\cos(x)-\int 2x\cdot(-\cos(x))dx \\ &= -x^2\cos(x)+\int 2x\cos(x)dx \\ &= -x^2\cos(x)+2x\sin(x)-\int 2\sin(x)dx \\ &= -x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)+C\end{aligned}$$

בסעיף (ג), יש שתי דרכים (לפחות) לפתור. הראשונה היא לזהות את הפונקציה המרוכבת $\sin(\ln(x))$ ולנסות קודם להפתר ממנה ע"י הצבה $u=\ln(x)$ שגורר $x=e^u$ ולכן $dx = e^u du$:

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln(x))dx &= \int \sin(u)dx \\ &= \int \sin(u)e^u du\end{aligned}$$

למזלינו, האינטגרל החדש פתיר ע"י אינטגרציה לפי חלקים פעמיים:

$$\begin{aligned}\int \sin(u)e^u du &= e^u\sin(u) - \int \cos(u)e^u du \\ &= e^u \sin(u) - e^u\cos(u) - \int \sin(u)e^u du\end{aligned}$$

מעבירים אגפים, מחלקים ב־2, ומסיקים

$$\int \sin(u)e^u du = \frac{e^u}{2}(\sin(u)-\cos(u))+C = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)-\cos(\ln(x))+C$$

דרך נוספת (שקולה) היא להפעיל מיד אינטגרציה לפי חלקים, ע"י הכנסת "1" מלאכותי (כמו בחישוב האינטגרל $\int \ln(x)dx$), כך שמבצעים אינטגרציה על 1 (ההופך ל־x) וגזירה על $\sin(\ln(x))$ (ההופכת ל־$\cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}$ ע"י כלל השרשרת):

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln(x))dx &= \int 1\cdot\sin(\ln(x))dx \\ &= x\sin(\ln(x)) - \int x\cdot\cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\sin(\ln(x)) - \int 1\cdot\cos(\ln(x))dx \\ &= x\sin\ln(x) - \left(x\cos(\ln(x) - \int x\cdot(-\sin(\ln(x)\cdot\frac{1}{x})dx\right) \\ &= x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int \sin(\ln(x))dx\end{aligned}$$

ושוב אפשר להעביר אגפים ולחלק ב־2 על מנת להסיק

$$\int \sin(\ln(x))dx = \frac{1}{2}\Big(x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))\Big) + C$$

בהסכמה עם הדרך הראשונה.

.3

(א) <u>הוכח או הפרך:</u> אם האינטגרל $\int_2^\infty f(x)dx$ מתכנס <u>בהחלט</u>, אזי גם האינטגרל $\int_2^\infty |f(x)|^2dx$ מתכנס.

(ב) <u>הוכח או הפרך:</u> אם האינטגרל $\int_2^\infty f(x)dx$ מתכנס <u>בתנאי</u>, אזי גם האינטגרל $\int_2^\infty |f(x)|^2dx$ מתכנס.

<u>פתרון:</u> בסעיף א', הטענה כפי שהיא כתובה אינה נכונה; אם f **חסומה**, אז הטענה נכונה וניתנת להוכחה פשוטה ע"י מבחן ההשוואה (אלא מה...) . אם $|f(x)| \le M$ לכל $2 \le x < \infty$, אזי

$$\int_2^\infty |f(x)|^2dx \le M\int_2^\infty |f(x)|dx < \infty$$

לפי הנתון שהאינטגרל של f מתכנס בהחלט.
ללא הנחה של חסימות, ניתן לקחת פונקציה אשר דועכת יפה בסביבה של ∞, אך שואפת ל־∞ בסביבה של $x=2$ בצורה כזאת שהאינטגרל של f מתכנס אך מתבדר בסביבה של 2 כאשר מעלים בריבוע; לדוגמא הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x-2}} & 2\le x\le 3\\ 0 & x>3\end{cases}$$

ניתן גם לייצור דוגמא החסומה על כל קטע סגור (כלומר, בפרט חסומה בסביבה של 2, ואי־החסימות באה לידי ביטוי רק כאשר $x\to\infty$). ניקח פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}n & x\in\left[n,n+\frac{1}{n^3}\right]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

האינטגרל של f הוא סכום שטחים של מלבנים, כל אחד בגובה n ורוחב $\frac{1}{n^3}$ ולכן בעל שטח $n\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^2}$ כך שהאינטגרל הכולל הוא

$$\int_2^\infty |f(x)|dx=\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2}<\infty$$

ואילו האינטגרל של $|f(x)|^2$ הוא סכום מלבנים באותם רוחבים $\frac{1}{n^3}$ אך הפעם בגובה n^2 ולכן בעלי שטח $n^2\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n}$, כלומר

$$\int_2^\infty |f(x)|^2dx=\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}=\infty$$

כדרוש.
לסעיף ב', הטענה אינה נכונה, ויש כמה דוגמאות פשוטות כגון

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin(x^2)\\ g(x)&=\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

וכדומה, כאשר הרעיון הוא שהסינוס גורם להתכנסות (דרך דירישלה, לדוגמא בגלל הביטולים וצמצומים פנימיים, הנעלמים מהתמונה ברגע שלוקחים ערך מוחלט. העלאה בריבוע יכולה לגרום להתכנסות בהחלט אם ניקח לדוגמא $\frac{\sin(x)}{x}$, אך בחירה נבונה של המכנה גורמת להתכנסות האינטגרל המקורי (בתנאי) וגם לאחר העלאה בריבוע לא גורם להתכנסות בהחלט. אפשרות נוספת, ברוח דוגמת "המלבנים" בסעיף א', הוא לייצור פונקציה בעלת ערך מוחלט 1 בכל מלבן, עם החלפת סימנים לסירוגין, דוגמת

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

המלבן ה־n הוא בעל שטח $\frac{1}{n}$, אך הסימנים המתחלפים גורמים לכך ש־>

$$\int_2^\infty f(x)dx=\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n}<\infty$$

מתכנס (לפי לייבניץ, לדוגמא), ואילו

$$\int_2^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_2^{\infty}|f(x)|dx=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

כידוע.

.4

(א) תהי $f_0(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,a]$, ונגדיר באינדוקציה סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[0,a]$ על ידי

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$$

הוכח כי הסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x)\equiv 0$ (הפונקציה השווה זהותית ל־0) על $[0,a]$.
(רמז: זכרו כי פונקציה רציפה על קטע סגור חסומה בו.)

(ב) תהי $f_0(x)\equiv 1$ (הפונקציה השווה 1 זהותית), ונגדיר באינדוקציה סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[0,1]$ על ידי

$$f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

הוכח שסדרה זו מתכנסת במידה שווה על הקטע $[0,1]$.

<u>**פתרון:**</u> בסעיף א', ידוע לנו שצריך להוכיח התכנסות בהחלט לפונקציה שהיא זהותית 0, ולכן המטרה שלנו היא להוכיח

$$0=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le a}|f_n(x)-0|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le a}|f_n(x)|$$

ואנחנו רוצים לחסום את $f_n(x)$ בצורה אחידה (ויעילה). הרמז מכוון אותנו להשתמש בעובדה שקיים M אשר חוסם את $|f(x)|\le M$ בכל $x\in[0,a]$. בפרט, זה אומר ש—

$$\begin{aligned}
|f_1(x)| &\le \int_0^x Mdt=Mx\\
|f_2(x)| &\le \int_0^x |f_1(x)|dx\le\int_0^x Mxdx=M\frac{x^2}{2}\\
\vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots\\
|f_n(x)| &\le \int_0^x |f_{n-1}(x)|dx\le M\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

כפי שאפשר להראות באינדוקציה (לדוגמא). אז החישוב הסופי שלנו לסופרימום הוא

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le a}|f_n(x)| &\le \lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le a} M\frac{x^n}{n!}\\ &\le M\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\\ &= 0\end{aligned}$$

והסדרה מתכנסת במ"ש ל־0.

בסעיף ב', לא נאמר לנו לאיזו פונקציה הסדרה מתכנסת, רק שצריך להוכיח שהיא מתכנסת במ"ש (למשהו). אבל חישוב פשוט (אינדוקציה, שוב) מראה שהסדרה היא בעצם

$$f_n(x) = x^{\frac{2n-1}{2n}} = x^{1-\frac{1}{2n}}$$

ולכן ברור שהגבול (הנקודתי) הוא

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{2n-1}{2n}} = x^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}} = x^1 = x$$

עכשיו צריך להוכיח התכנסות במ"ש; אפשר לעשות זאת בשתי דרכים (לפחות). דרך אחת היא לפי משפט דיני: הפונקציות f_n רציפות, והסדרה מונוטונית יורדת על קטע סגור $[0,1]$, והפונציה הגבולית $f(x)=x$ רציפה— לכן ההתכנסות היא במ"ש.

ניתן גם לחשב את הסופרימום בצורה מפורשת:

$$|f_n(x)-f(x)| = f_n(x)-f(x) = x^{\frac{2n-1}{2n}} - x$$

ההפרש שווה ל־0 בקצוות $x=0$ ו־$x=1$, ולכן המקסימום מתקבל בפנים הקטע, בנקודה בה הנגזרת מתאפסת

$$0 = f_n'(x) - f'(x) = \frac{2n-1}{2n}x_n^{-\frac{1}{2n}} - 1$$

$$x_n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n}$$

ולכן ההפרש המקסימלי הוא

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)| &= \lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{2n-1}{2n}} - x_n\\ &= \lim_{n\to\infty} x_n(x_n^{-1/2n}-1)\\ &= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n})^{2n}\cdot(\frac{2n}{2n-1}-1)\\ &= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n})^{2n}\cdot(\frac{1}{2n-1})\\ &= 0\end{aligned}$$

מכיוון שהסדרה $(1-\frac{1}{2n})^{2n}$ חסומה (היא שואפת ל־$\frac{1}{e}$) והסדרה $\frac{1}{2n-1}$ שואפת ל־0. לכן הסדרה מתכנסת במ"ש.

5. יהיו $\{c_n\}$ המקיימים

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n &= 1 \end{aligned}$$

(א) מצא תחום התכנסות של טור החזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(ב) הוכח שקיימת נגזרת של f שאינה מתאפסת ב־0; כלומר, הוכח שקיים $n > 0$ המקיים $f^{(n)}(0) \neq 0$.

(ג) הוכח שהגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = L$$

קיים אם ורק אם $c_0 = 0$. מהם הערכים האפשריים לגבול L?
(רמז: מהו טור החזקות המתכנס לפונקציה $xf'(x)$ בסביבה של $x = 0$?)

<u>**פתרון:**</u> בסעיף א'– שימו לב שהנתונים בעצם אומרים ש:

$$\begin{aligned} f(1) &= \infty \\ f(-1) &= 1 \end{aligned}$$

היות ומדובר בטור חזקות סביב $x = 0$, קיים רדיוס התכנסות R כך שהטור מתכנס לכל $-R < x < R$ ומתבדר לכל $|x| > R$. היות והטור מתכנס בנקודה $x = -1$, רדיוס ההתכנסות הוא לפחות $R \geq 1$. היות והטור מתבדר בנקודה $x = 1$, רדיוס ההתכנסות הוא לכל היותר $R \leq 1$. לכן $R = 1$. הנתונים גם אומרים לנו שהטור מתכנס באחד הקצוות $x = -1$ ומתבדר בקצה השני $x = 1$, ולכן בסה"כ תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$, כלומר

$$-1 \leq x < 1$$

בסעיף ב', נזכר בנוסחת טיילור, האומרת (היות והפונקציה f מהגדרתה אנליטית בסביבה של $x=0$)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

או במילים אחרות, $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. לכן אם כל הנגזרות ב־0 יתאפסו, אזי כל המקדמים $c_n=0$ לכל $n>0$, מה שסותר את התבדרות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$.
בסעיף ג', נשים לב שמתקיים $f(0)=c_0$, ולכן f מתאפסת ב־0 אם ורק אם $c_0=0$. לכן אם $c_0\neq 0$, אזי המונה $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\neq 0$ ואילו המכנה $\lim_{x\to 0}xf'(x)=0$, ולכן המנה מתפוצצת והגבול לא קיים.
אם $c_0=0$, אז יש לנו מנה של שני טורי חזקות. נשים לב שהטור

$$xf'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^n$$

מתוך גזירה איבר־איבר בסביבה של 0 (בתוך רדיוס ההתכנסות), ומקבלים את המנה

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots}{c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+\cdots}$$

מסעיף ב' ידוע לנו שהמקדמים לא יכולים כולם להתאפס; יהי n המקדם הראשון שלא מתאפס, כלומר $c_n\neq 0$ וכל $c_m=0$ לכל $m<n$. אז

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{c_nx^n+c_{n+1}x^{n+1}+c_{n+2}x^{n+2}+\cdots}{nc_nx^n+(n+1)c_{n+1}x^{n+1}+(n+2)c_{n+2}x^{n+2}+\cdots}$$

אז לפי חלוקת מונה ומכנה ב־x^n נגיע לגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{c_n+c_{n+1}x+c_{n+2}x^2+\cdots}{nc_n+(n+1)c_{n+1}x+\cdots}=\frac{\lim_{x\to 0}c_n+\cdots}{\lim_{x\to 0}nc_n+\cdots}=\frac{c_n}{nc_n}=\frac{1}{n}$$

(באופן שקול, אפשר גם לחשב את הגבול ע"י הפעלת לופיטל n פעמים). אז הגבול תמיד קיים כאשר $c_0=0$, והגבולות האפשריים הם $L=\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (נקבע לפי המקדם c_n הראשון שלא מתאפס).

6. מצא את המינימום ומקסימום המוחלטים של הפונקציה

$$f(x,y)=2x^2+y^2-4x$$

בדיסק הסגור

$$x^2+y^2\leq 4$$

פתרון: קודם כל נחפש נקודות קריטיות בפנים התחום, ע"י איפוס הגרדיאנט $\nabla f = (0,0)$ השקול למערכת

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{aligned}$$

המובילה לפתרון יחיד $(1,0)$, שהיא נקודה חשודה. ניתן גם לחשב בקלות את המטריצה הסיאנית

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שהיא בבירור חיובית לחלוטין (אלכסונית עם מקדמים חיוביים, ע"ע חיוביים 4 ו־2, דטרמיננטה חיובית $\det H(1,0) = 8 > 0$ ועקבה חיובית $tr(H(1,0)) = 6 > 0$, או בכל דרך אחרת), ולכן $(1,0)$ היא נקודת מינימום מקומי. מידע זה אינו חיוני להמשך התרגיל, אך כפי שאני ממליץ כדאי לבדוק את זה בכל מקרה כדי לתפוס שגיאות בהמשך!

עכשיו נבדוק נקודות על השפה, כלומר נקודות קיצון של $f(x,y)$ תחת האילוץ $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$. זה מוביל לתנאי $\nabla f = \lambda \nabla g$ יחד עם האילוץ עצמו, שמוביל למערכת

$$\begin{aligned} 4x - 4 &= \lambda 2x \\ 2y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

המשוואה השנייה נותנת מיד $\lambda = 1$ או $y = 0$; אם $y = 0$ אז האילוץ מחייב $x = \pm 2$ ונותן לנו שתי נקודות חשודות $(2,0)$ ו־$(-2,0)$. במקרה $y \neq 0$, מציבים $\lambda = 1$ במשוואה הראשונה ומקבלים $x = 2$, הגורר $y = 0$ ונותן לנו שוב אחת הנקודות הנ"ל.

סה"כ יש לנו שלוש נקודות חשודות: $(1,0)$, $(2,0)$, ו־$(-2,0)$. נציב בפונקציה $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x$ ונקבל

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 2 + 0 - 4 = -2 \\ f(2,0) &= 8 + 0 - 8 = 0 \\ f(-2,0) &= 8 + 0 - (-8) = 16 \end{aligned}$$

וניתן לראות שהמינימום המוחלט הוא $f(1,0) = -2$ והמקסימום המוחלט הוא $f(-2,0) = 16$. (שים לב שזה מסתדר עם העובדה ש־$f(1,0)$ הוא מינימום מקומי!)