תרגיל 11

1. אילו מהפונקציות הבאות היא ממכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

(א) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 7x_2y_2$

פתרון : לא! למשל

$$\left\langle 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 1^2 = 25$$

אבל

$$3\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot \left(2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1^2\right) = 3 \cdot 9 = 27$$

(ב) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2 + 7y_1y_2$

פתרון : כן! נבדוק את הקריטריונים

.i

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_{1+}y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 2(x_1+x_2)x_3 + 7(y_1+y_2)y_3 \\ = \; & 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 7y_1y_3 + 7y_2y_3 = (2x_1x_3 + 7y_1y_3) + (2x_2x_3 + 7y_2y_3) \\ = \; & \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\alpha x_1x_2 + 7\alpha y_1y_2 \\ = \; & \alpha 2x_1x_2 + \alpha 7y_1 = \alpha\left(2x_1x_2 + 7y_1\right) = \alpha\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

.ii

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2+7y_1y_2 = 2x_2x_1+7y_2y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

.iii

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1^2 + 7y_1^2 \geq 0$$

וקיים שיוויון לאפס אמ"מ $x_1 = y_1 = 0$ אמ"מ זהו וקטור האפס

(ג) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$

פתרון : לא! למשל

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

למרות ש $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ איננו וקטור האפס.

2. יהא V ממ"פ.

(א) הוכח כמעט לינארית ברכיב שני. כלמר הוכח כי $\langle v, \alpha u + w \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle +$ $\langle v, w \rangle$ (לכל $v, u, w \in V$ ולכל α סקלאר)

פתרון : לפי הגדרת מכפלה פנימית ותכונות הצמוד המרוכב נקבל כי

$$\langle v, \alpha u + w \rangle = \overline{\langle \alpha u + w, v \rangle} = \overline{\langle \alpha u, v \rangle + \langle w, v \rangle} = \overline{\alpha \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle} = \bar{\alpha}\overline{\langle u, v \rangle} + \overline{\langle w, v \rangle} = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$$

(ב) יהא $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס. יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i, v > = < v_i, u >$. הוכח כי $v = u$

פתרון : נעביר אגף ונקבל כי לכל i מתקיים כי

$$0 = \langle v_i, v \rangle - \langle v_i, u \rangle = \langle v_i, v - u \rangle$$

כיוון ש B בסיס, קיים צירוף לינארי

$$v - u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ולכן

$$\langle v - u, v - u \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v - u \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v - u \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 0 = 0$$

ולכן מתכונת מכפלה פנימית

$$v - u = 0$$

שזה שקול ל $v = u$

3. יהא V ממ"פ. תהא $T : V \to V$ ה"ל. הוכח או הפרך:

(א) אם לכל $v \in V$ מתקיים כי $\langle Tv, v\rangle = 0$ אזי $T = 0$

פתרון : הפרכה למשל $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלארית ו T המוגדרת להיות

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

אזי אכן מתקיים כי

$$\left\langle T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle == yx - xy = 0$$

אבל $T \neq 0$

(ב) תהא S קבוצה פורשת של V. אם לכל $u, v \in S$ מתקיים כי $< Tv, u >= 0$ אז $T = 0$

פתרון : הוכחה. יהא $v \in V$ צ"ל $Tv = 0$. כיוון ש S פורשת אזי

$$\exists v_1, \dots v_n \in S,\ \alpha_1, \dots \alpha_n : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$\exists u_1, \dots u_n \in S,\ \beta_1, \dots \beta_n : Tv = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$$

לפי נתון מתקיים לכל i, j כי

$$< Tv_i, u_j >= 0$$

כעת נחשב

$$< Tv, Tv >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Tv_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j < Tv_i, u_j >= 0$$

ולכן מתכונות מ"פ $Tv = 0$

4. יהא V ממ"פ מעל השדה $\mathbb{R}$ עם נורמה מושרית $||\cdot||$ הוכח את הבאים לכל $u, v \in V$:

(א) $< u, v >= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$

פתרון : נחשב לפי הגדרה

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle - (\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\langle u, v\rangle + 2\langle u, v\rangle\right) = \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

(ב) כלל המקבילית $||v+u||^2+||v-u||^2=2\left(||v||^2+||u||^2\right)$

פתרון : נחשב לפי הגדרה

$$\begin{aligned} ||v+u||^2+||v-u||^2 &= \langle v+u,v+u\rangle+\langle v-u,v-u\rangle \\ &= (\langle v,v\rangle+2\langle v,u\rangle+\langle u,u\rangle)+(\langle v,v\rangle-2\langle v,u\rangle+\langle u,u\rangle) \\ &= 2(\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle)=2\left(||v||^2+||u||^2\right) \end{aligned}$$

בהצלחה!