

פתרון תרגיל 3

.1

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1 + t^2)} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{(1 + t^2)} dt = 6 \int t^3 dt + 6 \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{3}{2} t^4 + 6 \arctan t + c = \frac{3}{2} x^{2/3} + 6 \arctan x^{1/6} + c$$

.2

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$$

$$x^2 - x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$t^2 - 2tx + x - 1 = 0$$

$$x(1 - 2t) = 1 - t^2$$

$$x = \frac{1 - t^2}{1 - 2t}$$

$$dx = \frac{-2t(1 - 2t) + 2(1 - t^2)}{(1 - 2t)^2} dt = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - 2t)^2} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{2(t^2 - t + 1)}{(1-2t)^2 \cdot t} dt$$

$$\frac{2(t^2 - t + 1)}{(1-2t)^2 \cdot t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-2t} + \frac{D}{(1-2t)^2}$$

$$A(1-2t)^2 + Bt(1-2t) + Dt = 2t^2 - 2t + 2$$

$$t^2 : 4A - 2B = 2$$

$$t : -4A + B + D = -2$$

$$t^0 : A = 2$$

$$A = 2$$

$$B = 3$$

$$D = 3$$

$$\Rightarrow \int \frac{2dt}{t} + \int \frac{3dt}{1-2t} + \int \frac{3dt}{(1-2t)^2}$$

$$= 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|1-2t| + \frac{3}{2} \frac{1}{1-2t} + c$$

$$= 2 \ln|x + \sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2} \ln|1 - 2x - 2\sqrt{x^2 - x + 1}| + \frac{3}{2} \frac{1}{1 - 2x - 2\sqrt{x^2 - x + 1}} + c$$

.3□□

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx+1$$

$$1+x-x^2 = t^2x^2 + 2tx+1$$

$$1-x = t^2x+2t$$

$$x(t^2+1) = 1-2t$$

$$x = \frac{1-2t}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{-2(t^2+1) - (1-2t) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2t^2 - 2t - 2}{(t^2+1)^2} dt$$

$$1+x = 1 + \frac{1-2t}{t^2+1} = \frac{t^2+1+1-2t}{t^2+1} = \frac{t^2-2t+2}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{(2t^2 - 2t - 2) \cdot (t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2 \cdot (t^2 - 2t + 2) \left[\frac{t(1-2t)}{t^2 + 1} \right]} dt = \int \frac{2t^2 - 2t - 2}{(t^2 - 2t + 2)(t - 2t^2 + t^2 + 1)} dt \\
&= -2 \int \frac{(t^2 - t - 1)}{(t^2 - 2t + 2)(t^2 - t - 1)} dt = -2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = -2 \int \frac{dt}{(t-1)^2 + 1} = -2 \arctan(t-1) + c \\
&= -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1+x-x^2} - 1}{x} - 1 \right) + c
\end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned}
&\int \frac{xdx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}} \\
&-x^2 + 7x - 10 = 0 \\
&x^2 - 7x + 10 = 0 \\
&x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \\
&\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-2) \\
&\sqrt{-(x-2)(x-5)} = t(x-2) \\
&-(x-2)(x-5) = t^2(x-2)^2 \\
&-(x-5) = t^2(x-2) \\
&x(t^2+1) = 5+2t^2 \\
&x = \frac{5+2t^2}{t^2+1} \\
&dx = \frac{4t(t^2+1) - (5+2t^2) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{5+2t^2}{(t^2+1)t^3 \left[\frac{5+2t^2}{t^2+1} - 2 \right]^3} \cdot \frac{(-6t)}{(t^2+1)^2} dt \\
&= -6 \int \frac{(5+2t^2) dt}{t^2(5+2t^2-2t^2-2)^3} = -\frac{2}{9} \int \frac{5+2t^2}{t^2} dt = \frac{10}{9} \frac{1}{t} - \frac{4}{9} t + c \\
&= \frac{10}{9} \cdot \frac{(x-2)}{\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4}{9} \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2} + c
\end{aligned}$$

.5

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx \\
&\frac{2-x}{2+x} = t^3 \\
&2-x = (2+x)t^3 \\
&2-2t^3 = x(t^3+1) \\
&x = \frac{2-2t^3}{t^3+1} = 2 \cdot \frac{1-t^3}{t^3+1} \\
&dx = 2 \cdot \frac{(-3t^2(t^3+1) - 3t^2(1-t^3))}{(t^3+1)^2} dt = \frac{-12t^2}{(t^3+1)^2} dt \\
&2-x = 2 - \frac{2(1-t^3)}{(t^3+1)} = \frac{4t^3}{t^3+1} \\
&= \int \frac{2(t^3+1)^2}{16t^6} \cdot t \cdot \left(\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2} \right) dt \\
&= \int \frac{-24t^3}{16t^6} dt = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4} \frac{1}{t^2} + c = \frac{3}{4} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{2}{3}} + c
\end{aligned}$$

.6

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$$

נציב $t = \sin 2x$ ואז

$$dt = \cos 2x dx$$

כלומר

$$\frac{1}{4} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4 \sin 2x} + C$$

.7

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

נשתמש בהצבה אוניברסלית ונקבל

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt &= \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{2+2t} dt = \ln(1+t) + C = \ln\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right) + C \end{aligned}$$

.8

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

נציב $t = \sin x$ ונקבל

$$\int \frac{2t}{1+t^2} dt = \ln(1+t^2) = \ln(1 + \sin^2 x)$$

שאלה 2

האם הפונקציות הבאות אינטגרביליות בקטע $[0, 1]$? הוכיחו. אם כן, מצאו את האינטגרל.
.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נוכיח שהפונקציה איניטגרבלית ושהאינטגרל הוא 0.
 נתאר חלוקה, שנקרא לה I_n . הרעיון שעומד בבסיסה הוא לכסות בחלק קטן את הנקודות הבעייתיות שהן $\frac{1}{k}$ וכך להבטיח שהסכום העליון לא יהיה גדול מדי.
 נבחר $L = \frac{1}{2n^2}$.
 החלוקה שלנו היא:

$$I = \{0, \frac{1}{n} - L, \frac{1}{n} + L, \frac{1}{n-1} - L, \frac{1}{n-1} + L, \dots, \frac{1}{2} - L, \frac{1}{2} + L, 1 - L, 1\}$$

נשים לב שפרט ל 0,1 כל נקודה $\frac{1}{k}$ ($1 \leq k \leq n$) "תורמת" שתי נקודות לחלוקה:
 $\frac{1}{k} - L, \frac{1}{k} + L$
 ראשית נראה שזו באמת חלוקה, כלומר רצוי לוודא ש

$$\frac{1}{k} + L < \frac{1}{k-1} - L$$

וזה שקול ל

$$2L < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2 - k}$$

וזה אכן נכון כי $k \leq n$.
 עכשיו נמצא את הסכומים של החלוקה. די ברור ש

$$\underline{S}(I_n) = 0$$

הסכום העליון דורש יותר מחשבה:
 הקטעים

$$[\frac{1}{k} - L, \frac{1}{k} + L]$$

תורמים לסכום העליון

$$1 \cdot 2L = \frac{1}{n^2}$$

(סך הכל יש n קטעים כאלה)

הקטעים $[\frac{1}{k} + L, \frac{1}{k-1} - L]$ תורמים 0.
 הקטע $[1 - L, 1]$ תורם $L = \frac{1}{2n^2}$.
 והקטע $[0, \frac{1}{n} + L]$ תורם $\frac{1}{n} + L = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.
 בסך הכל נקבל

$$\bar{S}(I_n) = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

זה שואף ל 0 ולכן יכול להיות מספר קטן כרצוננו.
 לכן לכל $\epsilon > 0$ קיים n כך ש

$$|\bar{S}(I_n) - \underline{S}(I_n)| < \epsilon$$

ולכן f אינטגרבילית.
 היות והסכום התחתון הוא 0 נקבל שהאינטגרל הוא 0.
 2.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

נראה ש f לא אינטגרבילית. נניח בשלילה שהיא אינטגרבילית על $[0, 1]$, אז היא צריכה להיות אינטגרבילית גם על $[\frac{1}{2}, 1]$ (לפי משפט שאני מקווה שראיתם בהרצאה - אבל אם לא לא קשה להוכיח אותו)
 תהי $I = \{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה של הקטע $[\frac{1}{2}, 1]$, אז בכל קטע $[x_{k-1}, x_k]$ יש נקודה רציונאלית, שערך הפונקציה בה גדול שווה ל $\frac{1}{2}$. ונקודה אי רציונאלית, שערך הפונקציה בה קטן שווה מ $-\frac{1}{2}$
 ולכן הסכום העליון הוא לפחות $\frac{1}{2}$ והסכום התחתון הוא לכל היותר $-\frac{1}{2}$ ולכן לא ייתכן שהפונקציה אינטגרבילית.