ב"ש אנליזה 1 תשעט מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(3x))\cos(3\sin(5x))}{e^x-1}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(3x))\cos(3\sin(5x))}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(3x))}{\sin(3x)}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\cos(3\sin(5x))\cdot\frac{3x}{x}$$
$$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(0)\cdot 3 = 3$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)+x}{e^x+\cos(e^x)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)+x}{e^x+\cos(e^x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\left(\frac{\sin(x^2)}{x}+1\right)}{\left(1+\frac{\cos(e^x)}{e^x}\right)} = 0\cdot\frac{(0+1)}{(1+0)} = 0$$

כאשר הנימוק הוא

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

ו $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(e^x)}{e^x} == \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ כי כולם מהצורה חסומה ($1/\sin(x^2)/\cos(e^x)$) כפול פונקציה ששואפת לאפס ($\frac{1}{e^x}/\frac{1}{x}$).

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n = \frac{e^n}{n!}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n} = \frac{e^{n+1}}{e^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = e\cdot\frac{1}{n+1}\to 0$$

וכיוון ש $0<1$ נקבל ש $\lim a_n = 0$.

2. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1$ וכן נתון $a_1 > 1$.

(א) הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n > 1$.

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1 > 1$ והוא גדול ממש מ 1.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n > 1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} > 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1 = a_n^2 + (a_n - 1) > 1^2 + 0 = 1$$

כאשר אי השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: ראשית נשים לב שהסדרה עולה שהרי לפי הגדרה, לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1)$$

ו $(a_n - 1)(a_n + 1) > 0$ כי ראינו בסעיף קודם ש $a_n > 1$. לכן לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} > a_n$.

אם הסדרה חסומה מלמעלה אז יש לסדרה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1 \to L + L^2 - 1$$

כלומר $L = L + L^2 - 1$. נעביר אגף לקבל $0 = L^2 - 1$ ולכן $L = \pm 1$. אבל הסדרה עולה ולכן לכל n מתקיים $a_n \geq a_1$ ולכן הגבול מקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_1 > 1$$

ולכן $L = \pm 1$ לא יכול להיות הגבול. מסקנה: הסדרה אינה חסומה ולכן הגבול שלה הוא ∞(כי היא עולה).

3. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & x > 0 \\ a & x \leq 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = a = \lim_{x\to 0^-} a$$

כיוון שהשיוויון הימני תמיד מתקיים נבדוק את מתי השיוויון השמאלי מתקיים: לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

ולכן רק עבור $a = 0$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 0$ (שזה המקרה היחיד בו fרציפה ב $x = 0$) אם f גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

וערך זה שווה ל $f'(0)$. נחשב:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x}=0$$

ומצד שני

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x^2)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$$

ולכן שני הגבולות אינן שווים ולכן f אינה גזירה ב $x=0$.

4. יהא מספר ממשי $a\in\mathbb{R}$.

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^7+e^x=a$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x)=x^7+e^x-a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x)=7x^6+e^x$$

ולכן $f'(x)>0$ לכל x (כי $e^x>0$ ו $7x^6\geq 0$) לכן f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף מתקיים כי

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}x^7+e^x-a=\{-\infty+0-a\}=-\infty$$
$$\lim_{x\to \infty}f(x)=\lim_{x\to \infty}x^7+e^x-a=\{\infty+\infty-a\}=\infty$$

ולכן קיימים c,d כך ש $f(c)<0, f(d)>0$. בקטע $[c,d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ורציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים חותך את ציר x, כלומר יש לה שורש בקטע זה. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש אחד וקיים לה שורש אחד ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

(ב) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{-x}{x^2+1}=e^x$.

פתרון: באופן שקול נבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $-x=e^x\left(x^2+1\right)$. נגדיר פונקציה

$$f(x)=e^x\left(x^2+1\right)+x$$

ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x)=e^x\left(x^2+1\right)+2x\cdot e^x+1=e^x\left(x^2+2x+1\right)+1=e^x\left(x+1\right)^2+1$$

ולכן, $f'(x)>0$ לכל x ולכן f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף מתקיים כי

$$\lim_{x\to \infty}f(x)=\lim_{x\to \infty}e^x\left(x^2+1\right)+x=\{\infty+\infty\}=\infty$$

ובגלל ש

$$\lim_{x\to -\infty}e^x\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(x^2+1\right)}{e^{-x}}\underbrace{=}_{\text{L'Hopital},\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\underbrace{=}_{\text{L'Hopital},\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

נקבל ש

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}e^x\left(x^2+1\right)+x=\{0-\infty\}=-\infty$$

ולכן קיימים c,d כך ש $f(c)<0, f(d)>0$. בקטע $[c,d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ורציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים חותך את ציר x, כלומר יש לה שורש בקטע זה. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש אחד וקיים לה שורש אחד ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

5. בכל אחד מהסעיפים תנו דוגמה לפונקציה כזו, או שהוכיחו שלא קיימת דוגמה כזו:

(א) פונקציה המקיימת $f''(x)<0$ וגם $f'(x)<0$ לכל x וגם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

פתרון: הפונקציה $f(x)=-e^x$ מקיימת כי $f'(x)=-e^x, f''(x)=-e^x$ ושתיהן שליליות לכל x ומתקיים ש $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

(ב) פונקציה המקיימת $f''(x)<0$ וגם $f'(x)<0$ לכל x וגם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

פתרון: נניח בשלילה שקיימת כזאת פונקציה. לכל $x>0$, הפונקציה f רציפה וגזירה בקטע $[0,x]$ ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת $0<c<x$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$$

כיוון ש ש $f''(x)<0$ נסיק ש $f'(x)$ יורדת ולכן $f'(c)\le f'(0)<0$. קיבלנו ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le f'(0)<0$$

ונכפיל ב x (שחיובי) לקבל $f(x)-f(0)\le xf'(0)$. ולכן

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(0)]\le\lim_{x\to\infty}[xf'(0)]=\{\infty\cdot(-)\}=-\infty$$

אבל $\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(0)]=\lim_{x\to\infty}f(x)-f(0)=0-f(0)$ וקיבלנו ש $-f(0)\le-\infty$ סתירה.