

# לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשעט, מועד א'

4.9.2019, ד' אלול תשעט

מרצים: מר אחיה בר-און, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטיי, ד"ר ארז שיינר  
מתרגלים: רועי אבל, ניקול בלשוב, עדי בן-צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, פולינה לוצקר, אושרית שטוסל.  
אורך המבחן: 3 שעות.  
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.  
הנחיות:

- יש לענות על כל 5 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 105. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד.  
ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- סימונים לאורך הבחינה: עבור מטריצה  $A$ , נסמן ב  $N(A)$  את מרחב האפס של  $A$ , ב  $C(A)$  את מרחב העמודות של  $A$ , ב  $R(A)$  את מרחב השורות של  $A$  וב  $rank(A)$  את הדרגה של  $A$ .

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (23 נק') תהא  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ .

(א) (7 נק') מצאו לאילו ערכי  $a \in \mathbb{R}$  מתקיים כי  $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 2 - a \end{pmatrix} \in C(A)$ .

(ב) (7 נק') הוכיחו כי קיימים  $a, b \in \mathbb{R}$  יחידים המקיימים כי  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} \in N(A^t)$  (כאשר  $A^t$  היא המטריצה המשוחלפת).

(ג) (9 נק') מצאו מטריצות  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, C \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$  המקיימות  $A = BC$  (הערה: ניתן להניח כי  $a, b$  מסעיף קודם ידועים).

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

2. (נק' 27) תהא  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$  המוגדרת ע"י משפט ההגדרה להיות ההעתקה הלינארית היחידה המקיימת:

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1-x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(א)  $\{1+x, 1-x, 1+x^2\}$  בסיס ל  $\mathbb{R}_2[x]$ .

(א) (נק' 8) מצאו בסיס ל  $\ker T, \text{Im} T$ .

(ב) (נק' 3) האם  $T$  הפיכה? הוכיחו את קביעתכם.

(ג) (נק' 8) מצאו נוסחה מפורשת עבור  $T(a+bx+cx^2)$ .

(ד) (נק' 8) מצאו בסיס  $B$  ל  $\mathbb{R}_2[x]$  ובסיס  $C$  ל  $\mathbb{R}^3$  כך ש  $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

3. (18 נק', 9 נק' לסעיף) יהא  $V$  מרחב וקטורי מממד סופי ותהא  $T : V \rightarrow V$  העתקה לינארית הפיכה.

(א) הוכיחו כי קיימים בסיסים  $B, C$  (למרחב  $V$ ) עבורם  $\det([T]_C^B) = 1$  (כלומר, הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת  $[T]_C^B$  שווה לאחד).

(ב) **הוכיחו/הפריכו:** בהכרח קיים בסיס  $B$  (למרחב  $V$ ) עבורו  $\det([T]_B^B) = 1$ .



דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

4. (21 נק', 7 נק' לסעיף) יהא  $n \geq 2$  טבעי ותהא  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(א) הוכיחו/הפריכו: עבור מטריצת היחידה  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מתקיים כי  $N(A - I) \subseteq N(A)$ .

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם  $A \neq 0$  אז קיימת  $B \neq 0$  (מאותו גודל של  $A$ ) כך ש  $N(BA) \neq N(A)$ .

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם  $rank(A) = rank(A^2)$  אז בהכרח  $C(A) = C(A^2)$ .

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

5. (16 נק'. 8 נק' לסעיף) תהינה  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  המקיימות  $A - A^t = B + B^t$ .  
(א) הוכיחו כי  $A$  מטריצה סימטרית ו  $B$  מטריצת אנטי-סימטרית (כלומר  $A = A^t, B = -B^t$ ).

(ב) הוכיחו כי  $\text{adj}(A)$  סימטרית גם כן.

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---